CUARTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Luis C. Contreras
José Carrillo
Nuria Climent
Modesto Sierra
(Eds.)

Universidad de Huelva
PUBLICACIONES

Cuarto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática

COMITÉ CIENTÍFICO

PRESIDENTE
Dr. Salvador Llinares Ciscar, C.U. Universidad de Sevilla

COORDINADOR
Dr. Modesto Sierra Vázquez, C.E.U. Universidad de Salamanca

VOCALES
Dra. Carmen Azcárate, T.U. Universitat Autónoma de Barcelona
Dr. Martín Socas Robaina, C.U. Universidad de la Laguna
Dr. Lorenzo Blanco Nieto, T.U. Universidad de Extremadura
Dr. Juan Díaz Godino, T.U. Universidad de Granada.

COMITÉ DE ORGANIZACIÓN
Dr. Luis Carlos Contreras González
Dr. José Carrillo Yánez
Profa. Nuria Climent Rodríguez
Departamento de Didáctica de las Ciencias y
Filosofía de la Universidad de Huelva.

collectanea
54

2001

Tipografía
Textos realizados en tipo Garamond de cuerpo 10/12, notas en Garamond de cuerpo 8/auto y cabeceras en versalitas de cuerpo 8.

Papel
Offset industrial ahuesado de 80 g/m²

Encuadernación
Rústica, cosido en hilo vegetal.

Printed in Spain. Impreso en España.

I.S.B.N.
84-95699-02-8

Depósito Legal
H - 214 - 2001

Imprime
Artes Gráficas Bonanza, S.L.

C.E.P.
Biblioteca Universitaria

Sociedad Española de Investigación en Educación.
Simposio (4º. 2000. Huelva).
Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática / Luis Contreras... [et al.] (eds.) -- Huelva : Universidad de Huelva, 2001.
215 p. ; 24 cm. -- (Collectanea (Universidad de Huelva) ; 54)
ISBN 84-95699-02-8
1. Matemáticas - Estudio y enseñanza - Congresos. 2. Matemáticas - Investigación - Congresos. I. Contreras González, Luis Carlos. II. Universidad de Huelva. III. Título. IV. Serie
51:37.02(063)
51:001.891(0639

Índice

El Comité Organizador agradece a la Excma. Diputación Provincial de Huelva la financiación del IV Simposio de la SEIEM.

Este simposio ha sido asimismo subvencionado por la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía.

Agradecemos también la colaboración de la Universidad de Huelva y del Excmo. Ayuntamiento de Moguer.

Este encuentro se enmarcó dentro de las actividades organizadas por el COAMM 2000 (Comité Onubense del Año Mundial de las Matemáticas, 2000).

PRESENTACIÓN

Del 12 al 15 de septiembre de 2000 se celebró en Huelva el IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), una sociedad que desde 1996 promueve la comunicación y debate sobre las investigaciones en Educación Matemática que se desarrollan en nuestro país, es un medio para la consolidación de grupos de investigación y favorece su respaldo por parte de organismos e instituciones.

En este encuentro se han alternado sesiones comunes y de los grupos de trabajo. Las sesiones comunes han consistido en seminarios, presentación de proyectos de investigación, presentación de paneles, y una mesa redonda. En los seminarios se mostraron diferentes perspectivas de aproximación a un tema común de investigación y la presentación de los proyectos de investigación va seguida de la reacción de un investigador ajeno a ambos proyectos.

El primero de los seminarios, coordinado por Carmen Azcárate (Universidad Autónoma de Barcelona), recogió tres propuestas de aproximación respecto a las nociones de *Representación y Comprensión*. Marianna Bosch (Universidad Ramón Llull) presentó los presupuestos teóricos de su propuesta, realizada desde una perspectiva antropológica; Isabel Romero (Universidad de Almería) y Victoria Sánchez (Universidad de Sevilla) propusieron marcos teóricos desde una perspectiva cognitiva para investigar, en el primer caso, sobre la comprensión de los alumnos de conceptos numéricos a partir de su uso de representaciones de esos conceptos y, en el segundo caso, sobre cómo la forma de conocer el profesor un contenido matemático (esto es, su representación mental de ese contenido) influencia su enseñanza. Las dos últimas ponentes ejemplificaron sus propuestas con investigaciones realizadas. Como ponente-coordinador de este seminario actuó Luis Rico (Universidad de Granada), que hizo una introducción al objeto común de investigación, destacando su complejidad y los distintos problemas (enunciados como “paradojas”) que se plantean en estas investigaciones y, tras la presentación de los ponentes, hizo un completo análisis de las intervenciones.

Bajo el título de *Pensamiento Numérico y Algebraico,* en el segundo seminario intervinieron Alicia Bruno, haciendo una síntesis de las investigaciones realizadas sobre este tema en la Universidad de La Laguna y centrándose en dos investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje de los números negativos, y José Luis González y Alfonso Ortiz. Estos últimos expusieron los fundamentos de la línea de investigación (entendida como *camino o proceso y, a la vez, marco en el que situar y relacionar entre sí los trabajos puntuales y en el que justificar el planteamiento general que da sentido al proceso*) que vienen desarrollando en la Universidad de Málaga y concretaron esta exposición con la presentación de una de las sublíneas que la componen: *Investigación en razonamiento inductivo numérico y algebraico.* Juan A. García y Martín Socas (Universidad de La Laguna) actuaron de ponente-coordinador y coordinador, respectivamente.

En el espacio reservado para los proyectos de investigación, Ángel Contreras (Universidad de Jaén) presentó el proyecto *Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y estudiantes de Bachillerato LOGSE y primer curso universitario*, que identifica obstáculos epistemológicos en dichos conceptos a través de los datos recogidos del análisis de textos, cuestionarios y análisis histórico. Asimismo, Pedro Cobo (Universidad Autónoma de Barcelona) presentó el proyecto *Desarrollo de técnicas interactivas de tutorización y formación. Aplicaciones a situaciones especiales de educación matemática,* realizado bajo la dirección de Josep Mª Fortuny. Este proyecto engloba varios subproyectos, en uno de los cuales, enmarcado dentro de la problemática del análisis del discurso, se centró la presentación. Lurdes Serrazina (Escola Superior de Educaçao de Lisboa) realizó la reacción a ambos proyectos, destacando, respecto del primero, la necesidad de caracterizar las diferencias entre error, obstáculo y concepciones alternativas de los alumnos y de interpretar éstas últimas en su contexto. Del segundo, subrayó la importancia de investigaciones sobre procesos de enseñanza-aprendizaje en alumnos que no pueden asistir a las clases convencionales y de investigaciones que consideren los procesos de interacción. En este sentido, sugirió la inclusión de más interacciones que las consideradas en el estudio (por ejemplo, las intervenciones del profesor). Salvador Llinares (Universidad de Sevilla) actuó como coordinador de esta sesión.

Los grupos de *Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria* y de *Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica* presentaron (en sendos paneles) el estado de sus investigaciones, mostrando sus orígenes, los presupuestos teóricos que comparten, las líneas de investigación que han desarrollado y los trabajos realizados y en proyecto. Esta sesión fue coordinada por Juan D. Godino (Universidad de Granada) y los paneles fueron presentados por Mª Jesús Cañizares (Universidad de Granada) y por Luisa Ruiz y Pilar Orús (de las Universidades Jaén y *Jaume I* de Castellón, respectivamente).

Internet (desde la doble perspectiva de herramienta y objeto para la investigación en Didáctica de la Matemática) protagonizó la mesa redonda que cerró las sesiones comunes y en la que intervinieron Juan D. Godino, Ángel M. Recio (Universidad de Córdoba) y Francisco Ruiz (Universidad de Granada). El primero de ellos informó sobre los recursos disponibles en la red para potenciar las relaciones entre los investigadores e interesados en la Educación Matemática, y propuso que desde la SEIEM se promoviera la creación de una *Comunidad Iberoamericana Virtual de Educación Matemática*. El segundo de ellos presentó un proyecto en el que la red es el objeto de la investigación. Francisco Ruiz aportó información sobre direcciones útiles para los investigadores en Educación Matemática.

Primer Seminario

Representación y Comprensión

Presentación y comentarios
Dr. Luis Rico Romero
Universidad de Granada

Ponencia 1
Un punto de vista antropológico: La evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática
Dra. Marianna Bosch Casabò
Universidad Ramon Llull

Ponencia 2
Representación y comprensión en pensamiento numérico
Dra. Isabel Romero Albaladejo
Universidad de Almería

Ponencia 3
Representaciones y comprensión en el profesor de matemáticas
Dra. Victoria Sánchez García
Universidad de Sevilla

Un punto de vista antropológico: La evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática

Marianna Bosch Casabò
Universidad Ramon Llull

1. MARCO TEÓRICO: LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

1.1. El programa epistemológico en didáctica de las matemáticas

La Teoría Antropológica en didáctica de las matemáticas (Chevallard, 1992, 1997, 1999; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) se inscribe dentro del programa de investigación que denominamos "programa epistemológico" (Gascón 1999) y que tiene su origen en los trabajos de Guy Brousseau iniciados a finales de los años 70 (Brousseau, 1999).

1.1.1. La característica principal del programa epistemológico consiste en considerar que el objeto primario de investigación de la didáctica es la ***actividad matemática*** tal como se realiza en distintas instituciones de la sociedad. Cuando se dice que la didáctica de las matemáticas estudia "las condiciones de difusión y transmisión del conocimiento matemático" (Brousseau 1994), no se considera el "conocimiento" desde un punto de vista psicológico, como un proceso mental de individuos aislados. El conocimiento es el producto o la cristalización de determinado quehacer humano y queda siempre caracterizado por las actividades de las que surge y por las que permite realizar.

1.1.2. Tanto el conocimiento como la actividad matemática son construcciones sociales que se realizan en instituciones –en comunidad–, siguiendo determinados contratos institucionales. Estudiar las condiciones de producción y difusión del conocimiento matemático requiere pues que seamos capaces de describir y analizar determinados tipos de actividades humanas que se realizan en condiciones particulares (por ejemplo en el aula, bajo la dirección de un profesor y siguiendo un determinado programa de estudio).

1.2. Necesidad de un modelo epistemológico explícito de la actividad matemática

El análisis de la actividad matemática requiere la utilización de nociones apropiadas que permitan describir sus distintos componentes, así como sus condiciones de producción y reproducción. Se obtiene entonces un *modelo epistemológico* de la actividad matemática, es decir, de lo que se entiende por hacer matemáticas y por producir conocimiento matemático.

1.2.1. Las componentes del modelo, que conforman, por así decirlo, la "anatomía" de la actividad matemática, deben corresponderse con las componentes del "saber matemático" entendido como organización teórica que emerge de la actividad matemática a la vez que la instrumenta.

1.2.2. Al mismo tiempo, la descripción anterior debe articularse con un modelo de la "fisiología" de la actividad, esto es, con las condiciones bajo las cuales se realiza y evoluciona, ya sea para *crear* nuevo saber matemático (la investigación pura o aplicada) o para *reconstruir* dicho saber, lo que constituye la actividad didáctica propiamente dicha.[1]

1.3. El modelo epistemológico propuesto por la Teoría Antropológica

La Teoría Antropológica describe la actividad matemática y el saber que de ella emerge en términos de *organizaciones o praxeologías matemáticas*. Una organización matemática es una entidad compuesta por: *tipos de problemas o tareas problemáticas*; *tipos de técnicas* que permiten resolver los tipos de problemas; *tecnologías* o discursos ("logos") que describen y explican las técnicas; una *teoría* que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. Los tipos de problemas y los tipos de técnicas constituyen el "saber-hacer" matemático, mientras que los discursos tecnológicos y teóricos conformarían el "saber" matemático propiamente dicho.

1.3.1. Dentro de este modelo, "hacer matemáticas" consiste en activar una organización matemática, es decir en resolver determinados tipos de problemas con determinados tipos de técnicas (el "saber hacer"), de manera inteligible, justificada y razonada (mediante el correspondiente "saber"). Este trabajo puede conducir a la construcción de nuevas organizaciones matemáticas o, simplemente, a la reproducción de organizaciones previamente construidas.

1.3.2. "Enseñar y aprender matemáticas" corresponde a la actividad de reconstrucción de organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones. La enseñanza o tarea docente consiste básicamente en dirigir dicha reconstrucción (generando en particular las condiciones que mejor la permiten), mientras que el aprendizaje puede considerarse como el fruto de la reconstrucción, ya sea individual como en grupo. Así, el objetivo de un proceso de enseñanza/aprendizaje puede formularse en térmi-

1. La Teoría Antropológica propone aquí un modelo del *proceso de estudio* de las matemáticas en términos de *momentos didácticos*. Ver Chevallard, Bosch y Gascón 1997.

nos de los componentes de las organizaciones matemáticas que se quieren reconstruir: qué tipos de problemas hay que ser capaz de resolver, con qué tipos de técnicas, sobre la base de qué elementos descriptivos y justificativos, en qué marco teórico, etc.

1.4. La "comprensión" desde la Teoría Antropológica

La Teoría Antropológica asume, como uno de sus postulados fundamentales, que toda actividad en sentido estricto, todo "saber-hacer", presupone la existencia de un "saber" o discurso justificativo-explicativo de la actividad. El término mismo de "praxeología", formado a partir de "praxis", actividad, y de "logos", discurso, atestigua la inseparabilidad supuesta entre el "hacer" y el "explicar" dicho hacer. La noción cultural de "comprensión" remite a esta dimensión de la actividad humana (que no es específica de la actividad matemática) de exigencia de producción de discursos descriptivos y justificativos de todo quehacer, entendiendo que, en muchos casos, las justificaciones producidas pueden ser muy parcas y remitirse a un simple argumento "folclórico" del tipo: "porque siempre ha sido así", "porque así funciona", etc.

1.4.1. El "incremento de la comprensión" sobre un campo concreto de la matemática o, usando la expresión de William P. Thurston (1994), el "avance de la comprensión humana de las matemáticas", corresponde, en este contexto, a la posibilidad de producir (o reproducir) un discurso tecnológico y teórico asociado a determinadas actividades de resolución de problemas, aunque algunas veces dichas actividades queden implícitas en el discurso.

1.4.2. Es importante recalcar que este discurso, cuya función principal consiste en proporcionar a la actividad descripciones, explicaciones y justificaciones válidas (para la institución en la que tiene lugar), también debe incorporar elementos de respuesta a la cuestión de las ***razones de ser*** de la actividad considerada y de las obras que ésta produce. La "comprensión" en el sentido aquí considerado incluye pues también la búsqueda de las tareas problemáticas que están (o que podrían estar) en el origen de la organización matemática considerada. ¿Para qué sirven los ángulos? ¿Y los triángulos? ¿Por qué hay que aprender a calcular con fracciones? ¿O a multiplicar números negativos? Este tipo de preguntas forma parte del cuestionamiento tecnológico-teórico y constituyen un aspecto importante de la exigencia de justificación de las actividades correspondientes.

1.4.3. En general, los elementos tecnológicos y teóricos de una organización matemática remiten a elaboraciones descriptivas y justificativas que son el fruto del trabajo matemático de varias generaciones. Pero cuando se consideran organizaciones matemáticas en proceso de construcción o reconstrucción (ya sea en manos de investigadores o de alumnos y profesores), entonces también podemos hablar de "tecnologías" y "teorías" para referirnos a discursos mucho más informales y espontáneos, producidos por los sujetos en situación de resolución de problemas para comentar, explicar y justificar su actividad. A estas tecnologías se incorporan entonces elementos que no tienen por qué ser de naturaleza matemática y que se combinan, de modo más o menos forzado, con la tecnología "estándar" de la institución matemática sabia.

1.4.4. Señalemos además que, en el marco de la Teoría Antropológica, no se hablará de "comprender un concepto", porque la unidad elemental de análisis de la actividad matemática no es el concepto sino la organización matemática o praxeología. El estudio de lo que se considera como "comprensión de un concepto" en una institución dada y para un tipo de sujetos dado requiere la explicitación de las actividades (es decir, de las praxeologías) que, en cierto sentido, dan vida al concepto mencionado, así como de la dinámica que articula entre sí unas organizaciones matemáticas con otras (incluyendo, claro está, las cuestiones problemáticas que motivan u originan dichas organizaciones).[2]

1.4.5. El cambio terminológico propuesto (que es también un cambio conceptual) no significa que se identifiquen entre sí todas las actividades matemáticas. La Teoría Antropológica (Chevallard, 1999) establece una marcada distinción entre las organizaciones matemáticas "puntuales", construidas alrededor de un único tipo de problemas, en las que las técnicas se utilizan de manera rígida y el entorno tecnológico acostumbra a ser muy pobre, de las organizaciones "locales" que se obtienen articulando entre sí –por vía de un discurso tecnológico elaborado- distintas organizaciones puntuales. Del mismo modo, la articulación de distintas organizaciones locales con un marco teórico común puede formar una organización matemática "regional".[3] En el caso de las praxeologías puntuales, la actividad se centra en la resolución de un único tipo de tareas, con poca visión de fenómenos generales y poca "productividad". Es su evolución hacia una praxeología local mediante la utilización de un mayor número de técnicas, utilizadas de manera más flexible y relacionadas entre sí, lo que conduce generalmente a la producción de nuevos elementos técnicos, nuevos discursos tecnológicos y al planteamiento de nuevos tipos de problemas.

2. INSTRUMENTOS OSTENSIVOS Y "REPRESENTACIÓN"

Que la actividad matemática se realiza mediante el recurso a una pluralidad de registros (lo escrito, lo gráfico, lo verbal, lo gestual, lo "material") no es únicamente una asunción de la Teoría Antropológica. Tampoco lo es la impor-

2. Según se desprende de Gascón (1998 y 1999), a medida que el "programa cognitivo" en didáctica de las matemáticas pone entre paréntesis las representaciones mentales (o internas) y se centra en las representaciones externas (especialmente semióticas), su objeto de estudio evoluciona del "conocimiento o comprensión de las matemáticas" entendidos como fenómenos psicológicos individuales hacia la "actividad matemática" empíricamente observable. En este punto aparece la necesidad de explicitar y refinar tanto el modelo de actividad matemática que se asume, como los términos mediante los cuales se describen los componentes de dicha actividad. Aparece en consecuencia un acercamiento entre el programa cognitivo y el programa epistemológico.

3. Por ejemplo, los problemas de proporcionalidad directa dan lugar a una organización puntual que, articulada a otras organizaciones puntuales por medio de una tecnología como la teoría clásica de las razones y proporciones, da lugar a una organización local sobre la proporcionalidad de magnitudes que, a su vez, formará parte de la organización regional de la aritmética clásica.

tancia acordada, en el análisis del funcionamiento de la actividad matemática, a las dificultades ligadas a la articulación entre diferentes registros.[4] La especificidad de la conceptualización propuesta por el enfoque antropológico se sitúa en un doble hecho. Por un lado, en la *no-diferenciación* entre registros desde el punto de vista de su "valor" o función en el trabajo matemático: tan importantes son a priori una figura geométrica y el discurso con el que se expresa un razonamiento, como la transformación más o menos mecánica de una expresión simbólica escrita o el gesto de tachado que permite realizar, indicar y recordar una simplificación de fracciones. Por otro lado, en la importancia acordada al *valor instrumental* que asignamos a los "objetos de representación" (que llamaremos, para mayor "neutralidad", objetos *ostensivos*), frente a su *valor semiótico* (de signo) que es generalmente el que predomina en la visión cultural corriente.

2.1. Objetos ostensivos y objetos no ostensivos

El modelo epistemológico propuesto por la Teoría Antropológica establece una distinción dentro del conjunto de objetos que componen los distintos elementos de las organizaciones matemáticas: las tareas problemáticas, las técnicas, las tecnologías y las teorías "están hechas" de objetos *ostensivos* y de objetos *no-ostensivos.* (Bosch, 1994; Bosch y Chevallard, 1999)

2.1.1. Los *objetos ostensivos* (del latín "ostendere", presentar con insistencia) son aquellos objetos que se perciben: se ven, se tocan, se oyen, etc. Son, en definitiva, los objetos materiales o los objetos dotados de cierta materialidad como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos, etc. Para utilizar una expresión general, hablaremos de la "manipulación" de los objetos ostensivos aunque los ostensivos en cuestión sean escrituras, gráficos, gestos o discursos.[5]

2.1.2. Los *objetos no-ostensivos* son entonces todos aquellos objetos que existen institucionalmente, en el sentido en que se les atribuye una determinada existencia, pero que no se pueden percibir ni mostrar por sí mismos: las ideas, los conceptos, las creencias, etc. Lo que sí se pueden es "invocar" o "evocar" mediante la manipulación de ciertos objetos ostensivos apropiados.

2.1.3. De manera un tanto paradójica, una vez establecida esta dicotomía, se postula la coexistencia permanente de los objetos ostensivos y los objetos no-ostensivos, dentro de lo que llamamos la *dialéctica de lo ostensivo y de lo no-ostensivo*: los objetos no-ostensivos emergen de la manipulación de objetos ostensivos pero, al mismo tiempo, dicha manipulación está siempre guiada y controlada por objetos no-ostensivos. El concepto de número entero o el de función lineal no existen sin toda una actividad manipulativa de ostensivos (tanto lingüística como gráfica, gestual y de escritura, sin olvidar en el origen la manipulación

4. Dentro del programa cognitivo, ver, por ejemplo, Duval (1996) y su noción de "registro de representación semiótica".

5. La manipulación de ostensivos incluye también su activación por medio del ordenador, actividad que pone en juego muy especialmente el registro de la escritura, aunque también el gráfico y el gestual, provocando además la creación de nuevos tipos de ostensivos y de articulaciones entre registros.

concreta de objetos materiales). Recíprocamente, toda manipulación de ostensivos viene controlada por la "activación" o "evocación" de objetos no-ostensivos cuyas características pueden verse modificadas a lo largo de la actividad.

2.1.4. Estamos pues lejos de reproducir una conceptualización simplista en la que lo ostensivo correspondería al nivel del "saber-hacer", con sus tipos de problemas y sus técnicas o procedimientos de resolución, reservándose el ámbito de los objetos no-ostensivos (conceptos, nociones, ideas, etc.) a la actividad justificativa y explicativa, es decir, el "saber" propiamente dicho. Al contrario, la distinción ostensivo/no-ostensivo afecta a *todos los elementos* que componen las organizaciones matemáticas. Es evidente, por ejemplo, que la elección de una simbolización y de una terminología adecuadas son también elementos muy importantes para la constitución y "calidad" de una tecnología o teoría. Y, de igual modo, la realización efectiva de una técnica puede variar enormemente, en términos de su eficacia y robustez, según si se activa un objeto no-ostensivo u otro. Así, por ejemplo, no es lo mismo producir una expresión simbólica como $(1+r)^2 = 1 + 2r + r^2$ a partir de una simple actividad de copia, activando no-ostensivos del tipo "igualdad entre escrituras", etc., que producirla como resultado de aplicar un desarrollo de cuadrados (un "pattern", como se diría en inglés) o como la igualdad entre una función y su polinomio tangente de orden 2 en torno a $x = 0$, que activaría no-ostensivos de muy distinto nivel.

2.1.5. Así pues, a la pregunta sobre el origen de los conceptos matemáticos (no-ostensivos) y su relación con los objetos que los representan (ostensivos), la Teoría Antropológica responde en términos de la dialéctica arriba mencionada: los conceptos surgen de la manipulación de ostensivos dentro de determinadas organizaciones matemáticas (es decir, como respuesta a ciertas tareas problemáticas y en un entorno tecnológico-teórico dado) y es esta misma práctica que, al institucionalizar u oficializarse, establece los vínculos entre ostensivos y no-ostensivos que permitirán a los primeros remitir o representar a los segundos en futuras posibles actividades.

2.1.6. Hablar de la coexistencia (o coactivación) de ostensivos y no-ostensivos en todos los niveles de organización de la actividad matemática, significa que en ningún caso se atribuye la primacía de los no-ostensivos sobre los ostensivos: no existe manipulación ostensiva (una escritura o un discurso) que sea la consecuencia directa de una supuesta "posesión" o "adquisición" de un no-ostensivo (una noción o un concepto); ni existe, en el lado opuesto, una manipulación ostensiva regulada que pueda prescindir de objetos no-ostensivos.

2.1.7. Sin embargo, la hipótesis de coexistencia entre ostensivos y no-ostensivos incluye la determinación de las relaciones que existen, en una institución dada y en un momento dado de su historia, entre determinados ostensivos y determinados no-ostensivos. Como bien puso de manifiesto la lingüística moderna desde Saussure (1962), la relación entre ostensivos y no-ostensivos se realiza de manera *arbitraria*, es decir no motivada por la naturaleza de los ostensivos, aunque sí provocada por el tipo de actividad manipulativa en la que éstos entran. Dicho de otro modo, no hay ninguna razón absoluta para que la escritura $f(x)$ se asocie al concepto de función, más que el hecho que, en la institución considerada, el ostensivo escrito $f(x)$ y el ostensivo oral "efe de equis" formen parte de las organizaciones matemáticas que se vinculan institucionalmente al no-ostensivo "función" (esto es, al no-ostensivo al que se invoca con el ostensivo oral "función").

2.2. ¿REPRESENTACIÓN? LA "VALENCIA SEMIÓTICA" DE LOS INSTRUMENTOS OSTENSIVOS

2.2.1. Cuando decimos que los objetos ostensivos permiten, si no "mostrar", por lo menos "evocar" e "invocar" los objetos no-ostensivos, retomamos el punto de vista dominante sobre la actividad matemática que consiste en considerar que los objetos ostensivos son los *signos* de otros objetos, generalmente no-ostensivos, a los cuales representan. Llamamos *valencia semiótica* a esta función de los ostensivos, aunque consideraremos que lo representado no es únicamente un no-ostensivo (concepto, idea o noción), sino que está formado siempre por *complejos* de objetos ostensivos y no-ostensivos vinculados por determinadas actividades matemáticas, es decir, por organizaciones matemáticas más o menos amplias.

2.2.2. Si consideramos que los ostensivos pueden funcionar como signos de una praxeología matemática, remitiendo a varios de los elementos (ostensivos y no-ostensivos) que las componen, también está claro que esta valencia semiótica sólo se adquiere en el ámbito de la realización de una actividad. Los ostensivos no "poseen" un significado, sino que, al ser manipulados, *producen* significado evocando otras organizaciones matemáticas. Así pues, en lugar de considerar el caso más restringido en el que un ostensivo, al ser manipulado, representaría un no-ostensivo, debemos hablar, más en general, de la *representación de toda una praxeología u organización matemática* (la organización "representada") y, ello, a partir de la manipulación de un ostensivo, manipulación que, a su vez, se inscribe en otra organización matemática (la organización "representante" o *modelo* de la anterior).

2.2.3. Podemos considerar finalmente que la valencia semiótica de los objetos ostensivos es inseparable de la *relación de modelización* que une una organización matemática considerada como *sistema* que se quiere estudiar, a una organización que funciona como *modelo* de la anterior (Chevallard, 1985-1989). Obtenemos entonces una nueva interpretación de la noción de representación mediante la noción matemática de modelización. Así, por ejemplo, una figura geométrica podrá "representar" una determinada propiedad o relación entre números, en la medida en la que dicha figura forme parte de una organización matemática en torno a determinados tipos de problemas geométricos que funcione como *modelo* de una organización numérica considerada entonces como *sistema modelizado*.[6]

6. Por ejemplo, el siguiente triángulo de puntos puede funcionar como *modelo* geométrico
?
? ?
? ? ?
? ? ? ?
para "representar" la suma de los n primeros números naturales (el *sistema* aritmético modelizado) y permitir establecer, usando el cálculo del área del triángulo (la *manipulación* del modelo), que la suma es $(n+1)/2$.

2.3. Valencia instrumental y "sensibilidad" de la actividad a los ostensivos

Como ya hemos dicho anteriormente, la Teoría Antropológica atribuye a los objetos ostensivos, al lado de su valencia semiótica, una *valencia instrumental* ligada a la capacidad de los sistemas de ostensivos para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas. Desde el momento en que se consideran los objetos ostensivos como constitutivos de las organizaciones matemáticas y los ingredientes primarios de las tareas, técnicas, tecnologías y teorías, se presentan, en primer lugar, como *instrumentos* de la actividad matemática, herramientas materiales sin las cuales no se podría realizar la actividad. Y, al igual que el albañil con su paleta (cuya valencia semiótica, dicho sea de paso, es innegable), lo que importa al realizador de la actividad matemática (y a todo aquél que debe reproducirla o hacerla reproducir), lo importante no es tanto lo que la herramienta pueda representar, sino su adecuación y efectividad en la realización de la actividad.

2.3.1. En un estudio sobre la gestión didáctica de los objetos ostensivos y su papel en el desarrollo de la actividad matemática en torno a la proporcionalidad (Bosch, 1994), la consideración de la valencia instrumental de los ostensivos permite poner en evidencia cómo pequeñas variaciones en determinados sistemas de ostensivos que, aparentemente, no afectaban excesivamente su valencia semiótica, sí podían, a largo plazo, afectar las condiciones (técnicas, pero también tecnológicas y teóricas) de realización de la actividad.

2.3.2. El análisis didáctico de las actividades matemáticas que se enseñan a los alumnos de la escolaridad obligatoria pone de manifiesto cómo, por exigencias de origen cultural, se tiende a menospreciar la valencia instrumental de los ostensivos de determinados registros, en particular el del grafismo y del lenguaje verbal), mientras que en otros registros (como el de la escritura algebraica, por ejemplo), se despoja a los ostensivos de toda capacidad significativa. El resultado es entonces una escasa atención al trabajo de manipulación del primer tipo de ostensivos (no se trabaja el discurso, se exigen gráficos muy precisos pero poco manejables, etc.) y un peso excesivo en la exigencia de interpretación del trabajo realizado con los ostensivos del segundo tipo (como el formalismo algebraico "no habla por sí mismo", se exige a los alumnos que, además de manipularlas correctamente, sean capaces de explicitar "el significado" de las expresiones algebraicas manipuladas, etc.).

3. PLURALIDAD DE REGISTROS Y REDUCCIÓN OSTENSIVA

3.1. La problemática didáctica

La didáctica de las matemáticas postula la existencia de *leyes didácticas* que rigen el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, condicionando su desarrollo en un entorno institucional concreto. Estas leyes se manifiestan en forma de *fenómenos didácticos* que, hasta cierto punto, escapan a la voluntad de los actores del proceso didáctico y que se constatan empíricamente como regularidades observables y difíciles de modificar.

3.1.1. Así, ante la constatación de alguna regularidad del tipo "se observa en la enseñanza de las matemáticas en secundaria el predominio del registro del formalismo algebraico y una marcada dificultad para articularlo con los demás registros (en particular el gráfico)", cabe preguntarse por las "razones" de la existencia de dicha regularidad o, lo que es equivalente, hay que buscar las condiciones bajo las cuales se da el fenómeno observado y aquéllas bajo las cuales podría no darse.

3.1.2. En las investigaciones que participan del *programa cognitivo*, se considera que dichas "razones" provienen fundamentalmente del funcionamiento psicológico de los sujetos que aprenden y de los que enseñan. El *programa epistemológico* postula, en cambio –y ésa es sin duda una de sus hipótesis fuertes– que la naturaleza de los fenómenos didácticos es esencialmente *matemática*, entendiendo "las matemáticas" en el sentido amplio de una actividad humana que se realiza en ámbitos institucionales concretos.

3.2. Un fenómeno didáctico: conocimientos exigidos que no son enseñados

Un tipo de fenómeno puesto en evidencia por diferentes investigaciones del programa epistemológico dentro de la Teoría de las Situaciones Didácticas concierne a las dificultades que tiene el profesor para gestionar en clase cierto tipo de conocimiento que no se considera como parte de la actividad matemática que se trata de enseñar, pero que resulta necesario para realizar las tareas que se encomiendan a los alumnos. Dicho de otro modo, el profesor se ve en múltiples ocasiones impelido a exigir de sus alumnos ciertos tipos de conocimientos que no les enseña (ni a veces les puede enseñar) pero que resultan necesarios para que se desarrolle el proceso de aprendizaje.

3.2.1. Este fenómeno se da, por ejemplo, en el caso de la utilización del razonamiento natural cuando se enseña el razonamiento lógico-matemático (Orús, 1992);[7] en el recurso a ciertos conocimientos espaciales durante el aprendizaje de la geometría elemental (Berthelot y Salin, 1992); o cuando se detecta que la actividad de estructuración y enumeración de colecciones, conocimiento que casi nunca es objeto de enseñanza explícita en la escuela obligatoria (desde la educación infantil a la ESO), constituye un conocimiento esencial para aprender a contar o a resolver problemas de combinatoria (Briand, 1993 y 1999).

3.2.2. En los casos anteriores, el problema didáctico puesto en evidencia es la dificultad de dar en clase un tratamiento explícito a conocimientos, general-

7. En este caso, el conocimiento exigido llega incluso a ser contrario al conocimiento que se pretende enseñar: son cláusulas habituales del contrato didáctico el hecho que el profesor pida a sus alumnos que generalicen una propiedad a partir de la consideración de algunos casos particulares, que no consideren el caso particular como incluido en el caso general (no es lo mismo un cuadrado que un rectángulo), etc.

mente transparentes para el profesor, cuyo estatuto (matemático) es incierto, cuando no totalmente inexistente. Su tratamiento didáctico pasa entonces por la explicitación de dichos conocimientos y por su consideración como parte integrante de la actividad matemática, es decir, por su matematización.[8]

3.3. El difícil tratamiento didáctico de ciertos registros ostensivos

El fenómeno descrito anteriormente afecta también, en cierto sentido, a la gestión didáctica de algunos registros ostensivos, debido a su difícil consideración como parte integrante de la actividad matemática (Bosch, 1994; Bosch y Chevallard, 1999).

3.3.1. Es un hecho conocido, y ampliamente puesto en evidencia, el débil recurso a determinados tipos de ostensivos en la construcción escolar de conocimientos matemáticos, en beneficio del registro de la escritura y del formalismo algebraico. Se observa, en efecto, en la matemática escolar, que los ***grafismos*** aparecen raramente en cuanto instrumentos de la actividad: su activación acostumbra a venir motivada por exigencias didácticas (hay que representar la gráfica de una función o dibujar una figura geométrica) y no por necesidades matemáticas, como herramientas para resolver problemas.

3.3.2. El registro de lo ***gestual*** queda prácticamente ignorado, y cuando se menciona (como en el gesto de "pasar un término de un lado al otro de una igualdad", para realizar un "producto en cruz" o para multiplicar dos matrices), se presenta como un "artilugio" con escasa legitimidad matemática. En ningún caso aparece como una etapa previa de un proceso de matematización que, por la vía del formalismo algebraico, "transporta" la mayoría de ostensivos gestuales en el registro de lo escrito.

3.3.3. Esta situación no debería ser considerada únicamente como una particularidad escolar. También en la matemática sabia, el reino del formalismo algebraico acaba confinando al "rincón de la pizarra" la mayoría de instrumentos gráficos y gestuales que, de hecho, y para el trabajo "privado" del investigador, resultan imprescindibles para la producción, explicación y reconstrucción de muchas demostraciones matemáticas (Guzmán, 1997).

3.3.4. En realidad, se puede mostrar que, a medida que se avanza en la construcción del conocimiento matemático, aparece un fenómeno de ***reducción ostensiva***[9] que tiende a recluir los instrumentos ostensivos utilizados al registro de lo escrito o, cuanto menos, de lo que se puede plasmar en el papel. Los demás registros, a pesar de que siguen estando presentes, quedan relegados al ámbito de "lo accesorio" y resultan difícilmente "enseñables".

8. El programa epistemológico no asume como tal la definición de "lo matemático" que nos impone la cultura, ni aquella que impera en las distintas instituciones en las que se usan, fabrican o enseñan matemáticas. En cuanto objeto primario de estudio, la definición y delimitación de la actividad matemática es algo que está siempre abierto y en constante cuestionamiento. Este cuestionamiento ("el misterio está en las matemáticas y no en los sujetos que las aprenden o enseñan") es uno de los puntos de partida del programa epistemológico en didáctica de las matemáticas. (Bosch y Chevallard 1998)

9. Ver Bosch, 1994; Bosch y Chevallard ,1999.

4. UN PROBLEMA DIDÁCTICO Y UNA PARADOJA

4.1. Cuestiones abiertas

¿Por qué si, como mantiene un gran número de investigadores, el recurso a una diversidad de registros debería facilitar el desarrollo del pensamiento matemático,[10] la evolución histórica de la actividad matemática tiende cada vez más a reducir el conjunto de ostensivos con los que se trabaja el registro de lo escrito? ¿Bajo qué condiciones se puede controlar, en el trabajo matemático de los alumnos, el uso abusivo de la escritura y de un pseudo-formalismo algebraico, en detrimento de los demás registros, en particular el de lo verbal y de lo gráfico? ¿Qué se necesita para que el recurso a estos dos registros sea realmente instrumental y no se quede, como ocurre generalmente, en el plano de la manipulación formal (por imposición cultural o didáctica, que no matemática)?

4.1.1. El programa epistemológico postula que la respuesta a dichas cuestiones debe hallarse en la naturaleza misma de la actividad matemática, en sus condiciones de génesis y de desarrollo, tanto históricas como institucionales. Si se asume que la evolución de la actividad matemática conduce a una disminución del "espesor ostensivo" de los instrumentos de trabajo mediante el proceso de algebrización o de formalización, entonces se necesita un trabajo específico de ingeniería matemático-didáctica para encontrar tipos de problemas o de situaciones problemáticas que provoquen o faciliten el recurso a la variedad de registros más adecuada en cada caso.

4.1.2. No se puede presuponer ni, por un lado, que el fenómeno de reducción ostensiva señalado tenga una causa exclusivamente didáctica y caiga bajo la responsabilidad de los profesores, ni que, por otro, esté únicamente en sus manos la solución. El trabajo de ingeniería matemático-didáctica señalado anteriormente deberá tener en cuenta, además, las restricciones específicas que pesan sobre la reconstrucción escolar de la actividad matemática, condiciones ligadas a la gestión del proceso de estudio y del contrato didáctico.

4.1.3. De todos modos, en ningún caso habría que relacionar de forma absoluta la disminución del recurso a distintos registros ostensivos con una disminución de la "comprensión" matemática. El proceso de algebrización es un caso claro de reducción ostensiva productiva de nuevos conocimientos y de mayor comprensión hacia muchos fenómenos matemáticos: la modelización algebraica, al construir modelos o "representaciones" escritas de gran número de organizaciones matemáticas (piénsese únicamente en la geometría, por ejemplo), ha permitido, y sigue permitiendo hoy día, resolver nuevos problemas, producir nuevas justificaciones y, sobre todo, establecer nuevas relaciones tanto entre tipos de problemas aparentemente dispares como entre distintas tecnologías e

10. Ésta es una hipótesis asumida por un gran número de investigaciones llevadas a cabo en el marco del programa cognitivo. Ver, por ejemplo, Duval (1994 y 1996), Hiebert y Carpenter (1992), Kaput (1992), Rico y Romero (1999).

incluso teorías.[11] Sí podríamos relacionar, en cambio, la "comprensión de fenómenos matemáticos" con la capacidad de *construir modelos* diversos e interrelacionados sobre sistemas cada vez más complejos.

4.1.4. Las necesidades propias a la actividad de modelización ha provocado que, en muchos campos abiertos de la investigación matemática, haya habido que volver a recurrir, y de forma demostradamente fructífera, a modelos sacados de una variedad de registros ostensivos, especialmente al del grafismo (piénsese, por ejemplo, en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, en la teoría de grafos o en los múltiples ejemplos, dentro del análisis, señalados por Guzmán (1997). Así pues, son las propias necesidades matemáticas ligadas a las organizaciones concretas que se trata de reconstruir en la escuela (y, en particular, a los problemas que en ellas se plantean) las que deberían guiar la elección de los tipos de ostensivos que se ponen a disposición de los alumnos y la importancia otorgada a los distintos registros.

4.1.5. Esta elección deberá tomar en cuenta las restricciones que afectan el recurso en el aula a los distintos registros ostensivos, restricciones que podrán ser tanto culturales (el "desprecio" al álgebra y al formalismo escrito, la supravaloración del lenguaje oral y del grafismo, etc.) como matemáticas (ausencia de técnicas o de tecnologías explícitas, o imposibilidad de ponerlas a disposición de los alumnos, etc.). [12]

4.2. La paradoja

Identificar "comprensión" con "pluralidad ostensiva" o "diversidad de registros" nos conduciría pues, de forma paradójica, a oponer el incremento de la comprensión matemática con la evolución histórica del conocimiento matemático. Estudiar, como propone la Teoría Antropológica, las condiciones de realización y evolución de la actividad matemática prestando especial atención a los instrumentos ostensivos que permiten ejercerla nos conduce, por el contrario, a poner de manifiesto determinadas necesidades matemáticas de origen didáctico que, lejos de circunscribirse al ámbito escolar, pueden llegar a afectar a todos los ámbitos de realización de la actividad matemática, incluyendo sus distintas formas de difusión, entre las que se encuentra, obviamente, el trabajo matemático de investigación.

11. Sobre la modelización algebraica y el proceso de algebrización, ver Chevallard (1985-1989) y Bolea, Bosch y Gascón (1998).

12. Ver Chevallard (1985), Bosch (1994) y Bosch y Chevallard (1999).

REFERENCIAS

Brousseau, G. (1994), Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, *ICMI Study 94.*

Brousseau, G. (1999), *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Berthelot, J. R.& Salin, M. H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Tesis doctoral de la Universidad Bordeaux I. Burdeos: Publicaciones del LADIST.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J.(1998), The role of algebraization in the study of a mathematical organization, *Proceedings of CERME-1*.

Bosch, M. (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-123.

Briand, J. (1993), *L'énumération dans le mesurage de collections*, Tesis doctoral de la Universidad Bordeaux I. Burdeos: Publicaciones del LADIST.

Briand, J. (1999), Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 41-75.

Chevallard, Y. (1985-1989), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, *Petit x*, nº 5 (51-94), nº19 (43-72).

Chevallard, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, 17-54.

Chevallard, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Duval, R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères – IREM*, 17, 121-138.

Duval, R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16/3, 349-382.

Gascón, J. (1998), Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-34.

Gascón, J. (1999), "Didactique fondamentale" *versus* "Advanced Mathematical Thinking": ¿dos programas de investigación inconmensurables?, *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Tomo II, 152-170.

Guzmán, M. de (1997), *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis*. Madrid: Pirámide.

Hiebert, J. & Carpenter, T.(1992), Learning and teaching with understanding. En: Grouws, D. A., (ed.), *Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Company.

Kaput, J. J. (1991), Notations and Representations as mediators of constructive processes. En: von Glasersfeld, E. (ed.), *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Orús, P. (1992), *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique ; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*, Tesis doctoral de la Universidad Bordeaux I. Burdeos: Publicaciones del LADIST.

Romero, I. & Rico, L. (1999), Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en Secundaria. *Revista EMA*, 4/2, 117-151.

Saussure, F. de (1962), *Cours de linguistique générale*, Paris: .

Sfard, A. (1994), Reification as the Birth of Metaphor, *For the Learning of Mathematics*, 14/1, 44-55.

Thurston, W. P. (1994), On proof and progress in mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30/2, 161-177.

Comentario al trabajo: La Evolución de los «Instrumentos de Representación» en la Actividad Matemática de Marianna Bosch Casabó

Luis Rico Romero
Universidad de Granada

El trabajo se estructura en tres apartados:

1. Teoría Antropológica en didáctica de las matemáticas.
   Establece las ideas generales del marco teórico en que se sitúa:
   1.1. Programa epistemológico en didáctica de las matemáticas
   1.2. Necesidad de un modelo epistemológico explícito de la actividad matemática.
   1.3. Presenta el modelo epistemológico propuesto por la Teoría Antropológica.
   1.4. Noción de «comprensión» desde la Teoría Antropológica.

2. Representación e instrumentos ostensivos de la actividad matemática.
   Presenta las nociones equivalentes a las de representación y asociadas en el marco teórico elegido, en tres apartados:
   2.1. Objetos ostensivos y objetos no ostensivos.
   2.2. Valencia semiótica de los objetos ostensivos.
   2.3. Valencia instrumental y sensibilidad de la actividad a los ostensivos.

3. Pluralidad de registros y reducción ostensiva.
   Desarrolla algunas dificultades y problemas resultantes del análisis que se deriva de los conceptos planteados:
   3.1. Problemática didáctica.
   3.2. Un fenómeno didáctico: conocimientos exigidos que no son enseñables.
   3.3. Difícil tratamiento didáctico de ciertos registros ostensivos.
   3.4. Un problema didáctico y una paradoja.

Ideas que destacan en los apartados anteriores.

1. Teoría Antropológica en didáctica de las matemáticas

1.1 Conocimiento y actividad matemática son construcciones sociales.

No se aclara en qué sentido se toman estas afirmaciones. No hay referencias ni mención al programa fuerte de la sociología del conocimiento ni a otros autores (Bloor, Restivo, Berger & Luckham, u otros).

Implicación de este postulado es la consideración social del sujeto del conocimiento (raras veces va a considerar un sujeto individual) y el ámbito institucional de su construcción.

1.2. Establece la correspondencia entre las componentes del modelo y la organización y actividad matemática. En matemáticas hay una organización y una actividad (nociones que se tratan en el apartado siguiente).

1.3 Amplía el apartado anterior: el saber surge de la actividad matemática, y emerge como organizaciones. Una organización está compuesta por cuatro componentes:

- tipos de problemas,
- tipos de técnicas,
- tecnologías, que explican las técnicas,
- teoría, que fundamenta y organiza el discursos tecnológico.

Idea interesante es la de ***hacer matemáticas***: activar una determinada organización matemática, es decir resolver problemas con técnicas determinadas, de manera justificada y razonada (apdo. 1.3.1).

Otra noción relevante, en este apartado, es aquella que la autora tiene sobre el aprendizaje: aprendizaje es lo aprendido. Parece no haber procesos de aprendizaje -no se consideran- sino solo productos: el fruto de una reconstrucción (apdo. 1.3.2). Lo aprendido lo es siempre por contraste con una construcción social ya existente.

Con estas nociones no parecen tener cabida cuestiones como aprendizaje por descubrimiento, aprendizaje creativo, invención, intuición matemática, etc.

1.4. La tesis principal del apartado se resume en una secuencia de afirmaciones:

i) «todo saber -hacer presupone la existencia de un saber o discurso justificativo- explicativo de la actividad» (no se considera así el saber hacer de un niño que, por ejemplo, aprende a caminar y no necesita de un saber justificativo: impone el saber);

ii) «la comprensión remite a la producción de discursos descriptivos y justificativos de todo quehacer» (comprender es saber explicarse; no se considera que comprender es un verbo transitivo);

iii) «comprensión de un concepto remite al hecho de disponer de un discurso que describa y justifique (...) debe relacionarse directamente con la producción de elementos tecnológicos ..» (no contempla la opción de una comprensión basada en la acción y no verbalizable directamente; parece que sólo hay comprensión cuando está sometida a control y se reduce a un dominio técnico y teórico).

La comprensión (fenómeno) parece estar sometida a la norma de un saber hacer (aspecto formal) en una organización. Los procesos de enseñanza y aprendizaje que suceden en las aulas cotidianamente parecen abandonados.

Aristóteles (Metafísica libro III) ya muestra las contradicciones de considerar las Formas como causas y entidades por sí. Postular un saber previo para que pueda darse un conocer, es una opción idealista.

Sostener que sólo se puede hablar de comprensión, incluso de comprensión matemática, en referencia a un saber ya establecido es un argumento falaz al que contradicen la invención permanente y el progreso en este campo.

La noción de comprensión planteada es insuficiente por reducionista e inadecuada por contradictoria.

En los dos últimos puntos se hace una concesión mencionando los discursos espontáneos (también se derivan los no espontáneos) y la rigidez o flexibilidad de una actividad, pero estas nuevas nociones -que parecen modos de proceso- no quedan caracterizadas dentro del modelo.

2. Representación e instrumentos ostensivos de la actividad matemática

En un primer párrafo conecta las nociones de registro, signo y representaciones, y reconoce su pluralidad e interés. Destaca como prioritario el valor instrumental de estas nociones y establece que a los objetos de representación los va llamar *objetos ostensivos* (¡para mayor neutralidad!); no se propone motivo fundado para establecer una nueva denominación.

En el punto 2.1 establece la dicotomía ostensivo-no ostensivo.

Los objetos ostensivos se basan en las sensaciones, se perciben por los sentidos; los objetos no ostensivos parecen estar basados en la razón, son objetos de una mente social (no de una mente individual, que no se considera), tienen existencia social -institucional- y son cuestiones de convenio ya que la institución les atribuye existencia. Estos objetos, desde su denominación, quedan mal caracterizados.

Resulta difícil encontrar la equivalencia con las dicotomías establecidas por Rico en el documento de partida, si bien parece estar cercana a la dualidad objetivo-convencional.

Los objetos no ostensivos siguen siendo tan inasibles y tan inobservables como las representaciones mentales, sólo que ahora la mente es social y no individual.

En este mismo punto (apdo. 2.1.5) se formula una pregunta esencial para la autora: ¿cuál es el origen de los conceptos matemáticos y su relación con los objetos que los representan?

La respuesta aportada es fundamental para entender todo el trabajo.

Recordamos que Aristóteles (Metafísica, 983a) establece cuatro tipos de causas:

- la entidad o esencia, el porqué, que es causa y principio y se puede reducir a la definición;
- la causa material, es decir el sujeto;

- la causa eficiente, de donde proviene el principio de acción, el inicio del movimiento;
- la causa final, aquello para lo cual se actúa.

Situando el planteamiento de M. Bosch (apdo. 2.1.5) dentro de esta clasificación vemos que sostiene una visión esencialista: el origen de los conceptos matemáticos es su esencia matemática, su matematicidad. Un concepto es matemático cuando se desenvuelve dentro de una organización matemática y está institucionalizado como tal, lo cual le dota de esencia. También considera, parcialmente, una causa final.

El desarrollo de la ciencia moderna tiene como principio inconmovible el abandono de las esencias como principios explicativos y se centra en las causas materiales y eficientes. Las ciencias humanas también incluyen la intencionalidad o causa final, pero nunca la esencial.

En el apartado 2.2 analiza la función representante que tienen los objetos ostensivos (signos) de los objetos no ostensivos a la que denomina *valencia.* Según la autora la valencia semiótica significa que un objeto no ostensivo -dado por un ostensivo- expresa, a su vez, signos (objetos ostensivos), ideas (objetos no ostensivos) y actividades. Lo ostensivo aparece como parte de lo no ostensivo, lo cual indica que lo mismo puede ser y no ser. Esta reflexión se hace sin concesión alguna para el lector, con escasa coherencia argumental y sin ningún tipo de análisis o precisiones. De este modo lo representado por un signo es un complejo de signos, ideas y actividades, es decir, una organización matemática (?).

Esta argumentación continúa en el apartado 2.2.2 donde se afirma que la valencia semiótica sólo se adquiere en el ámbito de realización de una actividad. Es decir, cualquier interpretación procedente de una actividad con signos parece poder llamarse significado. El apartado 2.2.3 también resulta confuso: introduce nuevos términos como *relación de modelización* y *sistema modelizado*, sin justificar y con contradicciones respecto a la argumentación anterior; «las relaciones entre los sistemas matemáticos son modelizaciones» (se suelen llamar teoremas de representación !!).

Concluye con el apartado 2.3 relativo a la valencia instrumental en donde insiste en el carácter puramente instrumental de los objetos ostensivos, señala que pequeños cambios en ellos afectan a su uso; finaliza señalando el escaso aprecio hacia los registros gráficos.

3. Pluralidad de registros y reducción ostensiva.

El apartado 3.1 contiene una serie de atrevidas aseveraciones, que se enuncian como verdades indiscutibles:

- El proceso de enseñanza- aprendizaje se rige por leyes decretadas por la DDM (¡qué más quisiéramos nosotros!);
- las leyes se manifiestan en forma de fenómenos didácticos (esto es lógicamente insostenible, incluso para la ley de la gravitación universal);

- una regularidad curricular -predominio del registro del formalismo algebraico- se presenta como una ley didáctica (las regularidades curriculares son convenios, no son leyes, pueden modificarse);
- en conclusión, los especialistas del programa cognitivo son necios: confunden las regularidades curriculares con el funcionamiento psicológico de los sujetos (¿de donde se infiere esto?).

En el apartado 3.2 se plantea un fenómeno didáctico relevante para la autora: qué ocurre cuando encontramos desconocimiento y carencias en cuestiones claves para un conocimiento que se quiere desarrollar. A esto lo llama «conocimientos que no se pueden enseñar (?) pero que son necesarios para el proceso de aprendizaje (¿cuál proceso de aprendizaje?). El problema planteado resulta confuso en su enunciado y no se justifica su conexión con los sistemas de representación (objetos ostensivos).

En el apartado 3.3 revisa diversos problemas relacionados con la escasa consideración de los registros gráficos y gestuales.

En el apartado 3.4 muestra las limitaciones que se derivan de haber considerado sólo el aspecto instrumental de los objetos ostensivos, que sustituye con frecuencia por registro.

Comienza por afirmar que el desarrollo de la matemática muestra una tendencia a reducir el número de registros a los simbólicos. No es verdad, el proceso de formalización y abstracción en determinadas etapas recientes de la historia de la matemática no debe confundirse con su desarrollo histórico general. Los modernos programas de software matemático, la teoría de grafos, teoría de campos, gráficas estadísticas, etc., contradicen la conjetura. Es cierto que hay dificultades estructurales para dotar de complejidad a las representaciones gráficas o diagramáticas, pero también es cierto que hay un prometedor desarrollo en este sentido; igual ocurre con la modelización de fenómenos matemáticos. La autora reconoce estos hechos en el apartado 3.4.3., pero vuelve a utilizar los mismos argumentos de manera parcial e interesada en el apartado 3.4.5 para «oponer el incremento de la comprensión matemática con la evolución histórica del conocimiento matemático», dando una interpretación sesgada a estas ideas.

En el apartado 3.4.1 concede que es conveniente romper con la tradición curricular, que considera una tradición matemática, y apunta a la exploración de «problemas que provoquen o faciliten el recurso a una variedad de registros». No se plantea que, si es posible, esto se debe a que en la base de cualquier concepto hay una pluralidad de registros. El apartado 3.4.2 vuelve a contraponer la comprensión social del conocimiento y la pluralidad de registros; como los procesos de aprendizaje individual no son relevantes, no hay construcción ni dificultades de aprendizaje ni errores de comprensión, por tanto no es necesario el uso coordinado de diversos sistemas de representación.

En resumen, las principales ideas que sostienen esta argumentación son:

- El conocimiento matemático es una construcción social; en este sentido los sujetos del conocimiento no son las personas concretas. La comprensión de un concepto se refiere a disponer de un discurso justificativo que replique el grado y profundidad en que es conocido por grupos e instituciones matemáticas.

- La actividad matemática consiste en activar una organización matemática; aprender matemáticas consiste en reconstruir alguna de estas organizaciones; el aprendizaje es lo aprendido.
- Las representaciones y signos se llaman objetos ostensivos y tienen una función puramente instrumental como vehículos de significación. Conceptos, ideas y organizaciones matemáticas son objetos no ostensivos.
- El origen de los conceptos matemáticos es su esencia matemática: su matematicidad. El conocimiento creativo, aprendizaje por descubrimiento, proceso individual de aprendizaje, intuición matemática, etc., quedan fuera de esta consideración.
- Las tradiciones y regularidades curriculares se llaman leyes didácticas y se justifican como producto de la evolución histórica de las matemáticas.

Representación y comprensión en pensamiento numérico

Isabel Romero Albaladejo
Universidad de Almería

RESUMEN

La importancia de los sistemas de representación a la hora de abordar la comprensión sobre un tópico matemático es hoy ampliamente reconocida en nuestra comunidad de Educación Matemática. El presente trabajo recoge los esfuerzos de nuestro grupo de investigación en Pensamiento Numérico por sistematizar, operativizar y poner en práctica una serie de ideas en torno a este tema. En lo que sigue, expondremos nuestro punto de vista sobre cuestiones ontológicas, psicológicas y didácticas en torno a las representaciones y la comprensión. Asimismo, ilustraremos cómo hemos puesto en práctica dichas ideas en algunas de nuestras investigaciones y qué resultados hemos obtenido. Finalizaremos con algunas reflexiones y cuestiones pendientes para el futuro.

1. INTRODUCCIÓN

Desde la década de los 80, las ideas en torno a las representaciones y a los sistemas de representación han ido ganando terreno a la hora de abordar el estudio de la comprensión en matemáticas y se han consolidado como herramienta útil a tal efecto. Dentro del grupo de investigación Pensamiento Numérico hemos venido trabajando en este campo durante aproximadamente una década, aplicando el resultado de nuestros esfuerzos al estudio de la comprensión de distintos sistemas numéricos y cuestiones afines.

En mi intervención en este seminario trataré de poner de manifiesto algunas de las posturas de nuestro grupo sobre el tema de la Representación y la Comprensión; en particular, sobre varias de las cuestiones que Luis Rico ha dejado abiertas a modo de introducción. Nuestro marco teórico ha tenido en cuenta las nociones de representación y sistemas de representación tratadas por Janvier et al. (1993) y Kaput (1987, 1992), el análisis semiótico de Duval (1993, 1995), los trabajos de Hiebert et al. (1986, 1992) y de Sfard (1991) sobre conocimiento matemático y comprensión, y la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990).

2. CUESTIONES ONTOLÓGICAS Y PSICOLÓGICAS

Cuando hablamos de representación surge, casi de inmediato, la dualidad representante-representado. Parece que en la noción misma de representación se halla implícita la existencia de algo a lo cual ésta representa. Y así, podríamos postular la existencia de dos mundos: el *mundo de los objetos representantes* y el *mundo de los objetos representados*. En nuestro caso, los objetos representantes serían los objetos matemáticos, de los cuales podríamos preguntarnos de dónde surgen, dónde se ubican, qué objetividad tienen, etc.

Quisiera hacer notar aquí que el planteamiento ontológico no es absolutamente necesario a la hora de trabajar con las representaciones. Podríamos simplemente contemplar la cuestión en su aspecto psicológico y concentrarnos, a la hora de estudiar la comprensión, en tratar de explicar la efectividad de la mente humana para manejar ideas y procesos extremadamente sofisticados, tanto concretos como abstractos. Y podríamos postular aquí, de nuevo, la existencia de dos mundos: un *mundo de operaciones mentales*, que es siempre hipotético, y *un mundo de operaciones físicas*, en el que se incluyen las operaciones con sistemas de notación. No sería necesario entonces aludir explícitamente a la existencia de objetos o conceptos matemáticos a los que se refieran nuestras operaciones mentales o físicas.

La discusión de si es pertinente postular la existencia de conceptos matemáticos en un mundo aparte de la actividad cognitiva de los sujetos (cuya aprehensión sería el fin último de dicha actividad) o si, por el contrario, sólo deberíamos referirnos a esquemas de operaciones y redes de significados tomados como compartidos por sujetos que hacen matemáticas -y que se ponen de manifiesto parcialmente en situaciones determinadas- ha sido objeto de largo debate. Personalmente, me resulta difícil inclinarme por una u otra opción (incluso cuando pienso en qué supuesto objeto matemático correspondería a mis esquemas sobre diversos aspectos del número real, los cuales se activan de forma parcial dependiendo de las demandas de circunstancias concretas).

Sin embargo, a efectos prácticos, hemos considerado útil referirnos a objetos matemáticos -y más concretamente, a conceptos y estructuras numéricos- como un constructo teórico que nos sirve de punto de partida a la hora de determinar los significados y usos que podemos observar en relación con los mismos, y que se ponen de manifiesto a través de los sistemas de representación. No entramos en las cuestiones de la existencia o no de un mundo aparte de objetos matemáticos y de la fidelidad con que se representaría dicho mundo, sino que, al posicionarnos, adoptamos el punto de vista de las modernas teorías de la ciencia y nos preocupamos únicamente por cuestiones de utilidad, coherencia, capacidad de explicación y acuerdo intersubjetivo.

Llegados a este punto, nos establecemos a nivel psicológico, y retomamos la distinción entre un mundo mental (interno) y un mundo físico (externo) para los sujetos. Dentro del mundo mental de la persona, siempre hipotético, situamos las llamadas *representaciones internas*, las cuales se refieren a las operaciones y estructuras mentales y a las concepciones[1] de los objetos matemáticos a los que aludimos en el párrafo anterior.

Dentro del mundo físico situamos las estructuras físicas y las llamadas *representaciones externas*, que corresponden a los sistemas de notación o sistemas semióticos. Entendemos por ello sistemas de reglas para identificar o crear sus caracteres, operar sobre ellos y determinar relaciones entre los mismos. Los caracteres no tienen por qué ser cadenas de letras o dígitos, sino que pueden incluir gráficos y diagramas, o incluso objetos físicos como bloques, regletas, piezas de puzzles, etc; además, los tipos de acción pueden variar según la naturaleza particular del sistema empleado.

Dejamos de lado la cuestión de si las representaciones internas son necesarias o prescindibles; son útiles para nosotros como constructo teórico por cuanto dichas representaciones y las actividades cognitivas asociadas a las mismas nos permiten dotar de significado a las actividades de los individuos manifestadas a través de los sistemas de representación externos. Y viceversa, realizamos acciones sobre las representaciones externas en un intento de aprehender significados, los cuales son de naturaleza interna.

A continuación, describimos una serie de actividades asociadas a los sistemas de representación, las cuales nos permitirán caracterizar nuestra noción de comprensión posteriormente.

I) La *formación de representaciones identificables* en un sistema dado. Implica una selección de rasgos y datos en el contenido que se quiere representar. Debe respetar unas reglas cuya función es asegurar las condiciones de identificación y reconocimiento; se trata de reglas de conformidad no de reglas de producción efectiva de un sujeto. La enunciación de una frase, la elaboración de un texto, el diseño de una figura geométrica, la escritura de una fórmula son ejemplos de actividades matemáticas, que reflejarían actividades cognitivas asociadas a sistemas dados de representación.

II) La *transformación dentro de un sistema de representación*. Debe respetar unas determinadas reglas sintácticas, con o sin referencia a significados exteriores.

III) La *traducción entre sistemas de representación*. Bajo esta acción, es posible conservar la totalidad o sólo parte del contenido, o ampliar el contenido de la representación inicial. De cualquier forma, la traducción supone la coordinación entre distintos sistemas de representación.

1. Utilizaremos los nombres "concepto" u "objeto matemático" cuando nos refiramos a una idea matemática en su forma "oficial" –como un constructo teórico dentro del "universo formal del conocimiento ideal". Para referirnos a toda la red de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto –la contrapartida del concepto en el universo interno y subjetivo del conocimiento humano—utilizaremos la palabra "concepción" (Sfard, 1991; p. 3).

IV) La ***cristalización*** o consolidación de relaciones y/o procesos en objetos conceptuales o "entidades congnitivas", los cuales pueden ser utilizados en relaciones o procesos en un nivel de organización más elevado.

V) La ***modelización***. Este tipo de actividad incluye la construcción y prueba de modelos matemáticos. Supone una traducción entre aspectos de situaciones y sistemas de representaciones.

Nuestra noción de ***comprensión*** asume que el conocimiento se caracteriza por ser rico en relaciones. Puede pensarse como una membrana conectada de conocimientos, una red en la que las relaciones de conexión son tan importantes como las piezas discretas de información. Partiendo de la posición que hemos establecido anteriormente, suponemos que el conocimiento se representa internamente, y que esas representaciones internas están estructuradas. La comprensión de un concepto consiste entonces en el modo y grado de integración en la estructura de conocimientos de un sujeto:

> *"Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido si forma parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas son comprendidas si su representación mental forma parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes"* (Hiebert y Carpenter, 1992; p. 67).

Por tanto, podemos afirmar que se ha producido la comprensión de un concepto por parte de un sujeto cuando éste manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento. Y esta manifestación sólo puede hacerse a través de los sistemas de representación y mediante las actividades asociadas a los mismos. Observando el dominio que el sujeto presenta a este nivel podemos inferir algo acerca de su organización mental interna y del grado de estructuración y la riqueza de la misma, la cual permitiría caracterizar diversos niveles de comprensión para un concepto determinado.

3. CUESTIONES DIDÁCTICAS

Una cuestión didáctica fundamental es la escasez de variedad en actividades relacionadas con los sistemas de representación que se han venido realizando en el sistema de enseñanza tradicional. Por lo general, sólo se suelen tener en cuenta las dos primeras actividades cognitivas mencionadas en el apartado precedente; una vez que se dominan las actividades de identificación y transformación dentro de distintos sistemas de representación, se ha venido considerando que el resto de las actividades se dominan espontáneamente. En lo que sigue, veremos que esto no es así e intentaremos dar algunas razones para ello. La repercusión que puede tener para la comprensión de los conceptos matemáticos se sigue directamente de la definición dada en el apartado precedente.

3.1. Sobre la traducción entre distintos sistemas de representación

Algunos de los bloqueos y obstáculos para la mencionada comprensión surgen de la imposibilidad de representar mediante un cierto sistema aspectos de un concepto que sólo pueden ser expresados mediante otros; esto es, de la irreductibilidad entre sistemas de representación. El interés de la traducción entre los distintos sistemas de representación de un concepto para lograr una coordinación entre los mismos tiene varios motivos. Por una parte podemos referirnos a una economía de tratamiento, ya que hay facetas de un concepto que un determinado sistema de representación puede poner de manifiesto con más claridad que otros. También hay acciones ligadas a un concepto en cuestión que pueden llevarse a cabo con más facilidad utilizando uno de sus sistemas de representación en detrimento de los otros. Así, la existencia de varios sistemas de representación permite cambiar de registro y, de este modo, trabajar de la manera más económica y más potente en cada caso.

Por otra parte, también existe una complementariedad de los sistemas, ya que una vez elegido un sistema de representación para un contenido, se impone una selección de algunos elementos significativos o de información del contenido que se representa; esta selección se hace en función de las limitaciones y las posibilidades del sistema elegido. Esto quiere decir que toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y que de un sistema de representación a otro no son los mismos aspectos de un contenido los que se representan. Los sistemas de representación pueden dividirse en los siguientes grupos: digitales y analógicos, analíticos y visuales, o simbólicos y gráficos. En toda tarea de pensamiento están presentes ambos, y la proporción entre uno y otro no sólo varía con la tarea o el aspecto que se quiera mostrar, sino también con las características de los sujetos, que pueden mostrar mayor habilidad o preferencia para uno u otro.

Por último, nos referiremos a la necesidad de coordinación e integración de registros de representación para la conceptualización. Como continuación de la idea anterior, si cada sistema de representación ofrece una consideración parcial para un concepto, el cruce de representaciones relativas a ese concepto mejora la información sobre el mismo; pero esto plantea mayores dificultades para el sujeto que está aprendiendo tales conceptos.

3.2. Sobre la cristalización

El siguiente paso, después de que el alumno haya interiorizado distintos sistemas de representación de un concepto y se haya familiarizado con las relaciones dentro de los mismos y entre los mismos, es el de la cristalización de las relaciones y/o procesos aprehendidos en objetos conceptuales. Estos objetos funcionan como entidades cognitivas que pueden ser utilizadas en procesos o relaciones de un nivel de organización más elevado. De esta manera, las redes conceptuales no sólo crecerían horizontalmente, fortificando y enriqueciendo conexiones, sino que crecerían también verticalmente, de un modo jerárquico, a través de estructuras cada vez más potentes que incluyen y permiten organizar a las anteriores.

La coordinación de distintos sistemas de representación de un concepto juega un papel fundamental aquí, aunque la cristalización supone un salto más allá, un salto en el que varias representaciones de un concepto pasan a ser unificadas semánticamente por un constructo abstracto, puramente imaginario.

El potencial de los nombres, símbolos, gráficos y otros sistemas de representación en la cristalización difícilmente puede sobreestimarse. A juzgar por la historia, en numerosas ocasiones la cristalización de conceptos ha estado ligada a los sistemas de representación. Por ejemplo, la introducción de la recta numérica puede considerarse como un paso definitivo para la conceptualización de los números negativos, lo mismo sucede con la ampliación del sistema decimal de numeración para incluir las fracciones decimales, en el caso de los números irracionales, y con la invención de lo que hoy conocemos como el plano Argand para considerar a los números complejos como objetos matemáticos legítimos. Parece razonable esperar que las representaciones puedan jugar un papel similar en el aprendizaje individual. Esta hipótesis, sin embargo, requiere un mayor trabajo empírico para ser corroborada.

3.3. Sobre la modelización

Por último, la modelización presenta un aspecto distinto de la utilización de sistemas de representación. Hasta ahora nos hemos referido a aspectos que tienen que ver con la construcción de significados a través del uso de representaciones ya establecidas. Sin embargo, cuando intentamos usar las matemáticas en situaciones de la vida real, los procesos que ponemos en juego implican la necesidad de hacer descripciones simbólicas de situaciones que ya son significativas de por sí. También aquí el dominio con los sistemas de representación es clave para realizar con éxito este tipo de actividad matemática.

Así, cuando los estudiantes desarrollan modelos para describir situaciones y dinámicas de la vida real, usualmente lo hacen utilizando una amplia variedad de representaciones que interactúan unas con otras y muchas de las cuales conllevan diagramas y gráficos e incluso sistemas de notación introducidos e inventados por los propios estudiantes.

En general, cuando se produce una descripción inicial de la situación que será modelizada, puede haber una combinación de palabras habladas, símbolos escritos, dibujos o diagramas. Pero, en cada caso, la representación tiende a organizar y simplificar la situación de manera que sale a la luz información adicional y, de esta forma, la atención puede dirigirse hacia patrones y regularidades subyacentes que pueden, a su vez, producir un cambio en las concepciones. Esta nueva información a menudo crea la necesidad de una descripción más refinada y elaborada, la cual tiende a hacer posible otro ciclo en el que vuelve a salir a la luz información adicional. Por tanto, en la construcción de un modelo matemático, los sistemas de representación internos y los externos interactúan y evolucionan en ciclos que se suceden hasta que la correspondencia entre el modelo y lo modelizado le parece al sujeto o sujetos suficientemente potente para producir los resultados deseados sin más adaptaciones.

Esta necesidad de una estabilidad conceptual cada vez mayor es fundamental para la progresiva diferenciación e integración de sistemas conceptuales relevantes; los sistemas de representación externos son imprescindibles, tal como se ha descrito, para que el proceso se lleve a cabo. Más aún, las habilidades matemáticas que se han señalado pueden llevar a los estudiantes más allá de pensar mediante el uso de una representación o un sistema de representación dados para desarrollar un pensamiento crítico y ser capaces de evaluar los puntos fuertes y débiles de sistemas de representación alternativos.

4. EJEMPLIFICACIÓN DEL USO DE LAS REPRESENTACIONES PARA CARACTERIZAR COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN NUESTRAS INVESTIGACIONES

Dentro del grupo de investigación Pensamiento Numérico se han venido realizando trabajos que tienen en común el interés por poner de manifiesto la pluralidad de los sistemas de representación mediante los que se expresan las estructuras numéricas. Cada sistema numérico, como complejo de entes, relaciones y operaciones, necesita de la coordinación de distintos sistemas de representación para expresar aspectos esenciales de su estructura. En lo que sigue, ejemplificaremos cómo hemos trabajado este tipo de actividad con los alumnos en dos de nuestras investigaciones, en las cuales las representaciones gráficas han ocupado un lugar relevante paralelamente con las representaciones simbólicas. Mostraremos las potencialidades y las dificultades que hemos observado en la coordinación de sistemas de representación en estructuras numéricas y en otras actividades tales como la identificación de representaciones y la cristalización.

4.1. Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales con alumnos de secundaria

Este trabajó se centró en el estudio de las sucesiones de números naturales, lineales y cuadráticas, mediante el empleo de tres sistemas de representación: figurativo (configuraciones puntuales), simbólico estructurado (sistema decimal de numeración) y operatorio (desarrollos aritméticos). Se pretendió incidir en los patrones de formación de secuencias, tanto puntuales como numéricas.

Por lo que respecta a la identificación de representaciones y a las actividades correspondientes a transformaciones dentro de un mismo sistema de representación, los escolares con los que se trabajó (primer ciclo de secundaria: 12-14 años) admitieron sin dificultad el sistema de representación puntual para los números naturales y lo utilizaron adecuadamente, trabajando con diferentes modelos geométricos y enunciaron una gran riqueza de relaciones para números triangulares y cuadrados.

Con respecto a la coordinación entre distintos sistemas de representación, estos alumnos establecieron argumentos que conectaban el patrón geométrico y su correspondiente patrón aritmético a través de las representaciones puntuales. La economía de tratamiento se puso de manifiesto cuando sus trabajos mostraron que, de los tres sistemas empleados en la representación de números, la configuración puntual es el más intuitivo debido a su carácter gráfico, lo cual permite un tratamiento y análisis visual de la estructura de una cantidad.

Sin embargo, este sistema adquirió su mayor potencia cuando se trabajó conjuntamente con los desarrollos aritméticos y la notación decimal usual. Una configuración puntual completa su sentido cuando se emplea como visualización de un determinado desarrollo aritmético de un número, o familia de números concretos. Esto ilustra la complementariedad de los sistemas de representación, que requiere el apoyo continuado y alternado entre unos y otros -especialmente entre los de tipo gráfico y los de tipo simbólico- para lograr el dominio de ellos, tal como para andar requerimos usar coordinadamente nuestras dos piernas.

En la investigación que nos ocupa surgieron también dificultades a la hora de coordinar los tres sistemas de representación que se manejaron. Tal como señalamos en apartados precedentes, la dificultad estriba en que cada uno de estos sistemas de representación ofrece una consideración parcial de las sucesiones a las cuales representan y del término general de las mismas. Así, cuando se pide obtener el término general de una sucesión, lo que se pide es encontrar -mediante la notación algebraica- una expresión general de la estructura común de todos los términos. Esta pregunta no puede ser respondida desde el sistema decimal de numeración, ya que, en este sistema, cada término viene dado por un símbolo único y no se considera su estructura compartida; de ahí que la respuesta más común que se encuentra es n, que es un símbolo único y representa “un término general”. En la representación mediante configuraciones puntuales sí se aprecia la estructura común, pero el carácter concreto de tales representaciones dificulta la obtención de un término genérico. Sólo mediante los desarrollos aritméticos es posible generalizar los términos de una sucesión. Sin embargo, tal como ya vimos, el cruce de representaciones relativas plantea dificultades de integración de las mismas. En los alumnos de este estudio se apreció una integración muy débil entre los tres sistemas de representación para expresar la noción de término general de una sucesión. Muy pocos identificaron el término general con la estructura operatoria común que comparten los términos de una secuencia, cuya notación más adecuada viene dada por el desarrollo aritmético. La comprensión de los escolares de 12-14 años sobre la noción de término general fue prácticamente inexistente dado que no se apreció estructuración entre las representaciones mentales correspondientes a los diferentes sistemas de representación utilizados. Sólo unos pocos estudiantes, que integraron total o parcialmente los tres sistemas, dieron muestras de un cierto dominio de la noción de término general de una sucesión. El salto a la cristalización, en el cual las distintas representaciones se unifican semánticamente en una noción abstracta, se revela una vez más como problemático de dar para una gran mayoría de los alumnos, al menos en los primeros intentos de integrar representaciones.

4.2. Introducción del concepto de número real en secundaria

En el segundo trabajo que presentamos se realizó un estudio de la introducción de los conceptos de número irracional y número real en secundaria. Dicha introducción tuvo lugar en un curso de estudiantes de 14-15 años y en ella jugaron un papel fundamental los distintos sistemas de representación de los números reales: el sistema de notación decimal y la notación operatoria de los reales, dentro de las notaciones simbólicas, y el modelo de la recta, junto con la medida de longitudes en el terreno de las representaciones gráficas.

En cuanto a la identificación y el manejo de sistemas de representación, nuestros alumnos mostraron comprensión del significado de los dígitos en el sistema de notación decimal y algunas dificultades a la hora de interpretar signos gráficos. Así ocurrió con los significados atribuidos al concepto de punto, segmento o línea, en los que salió a la luz la confusión entre aspectos empíricos y teóricos de las representaciones gráficas, y cuya aclaración resultó fundamental para la comprensión de la existencia de longitudes inconmensurables.

Por lo que respecta a la traducción entre distintos sistemas de representación de los reales y a la coordinación entre los mismos, pudimos observar cómo nuestros estudiantes llegaron a dominar relaciones de complementariedad y economía de representaciones, pasando adecuadamente de unas a otras cuando la ocasión lo requería. Así, fueron capaces de recurrir a la notación fraccionaria de decimales periódicos cuando el fin era realizar operaciones aritméticas con ellos, o viceversa, cuando se trataba de ordenarlos, así como de utilizar pertinentemente las notaciones operatorias para pasar a las representaciones geométricas y, de este modo, argumentar que determinados decimales no periódicos podían representarse exactamente.

No obstante, como sucedió en la investigación anterior, el hecho de que cada representación de los reales dé cuenta de aspectos parciales del concepto en cuestión provocó dificultades a la hora de integrarlas. Así, pudimos observar la resistencia de varios alumnos a considerar como equivalentes representaciones de los números reales que presentan facetas distintas y exclusivas de cada una. Un punto clave aquí es llegar a admitir que un decimal infinito puede ser "igual exactamente" a su notación operatoria correspondiente (fracción, si éste es periódico, raíz cuadrada, etc.) y también que un decimal infinito pueda corresponder a la medida de una longitud finita y bien delimitada. No todos los alumnos parecen dispuestos a admitir esto de buen grado, aunque el hacerlo facilita el paso siguiente de la cristalización de conceptos como número irracional y número real.

Un considerable progreso hacia la mencionada cristalización se produjo a través de los reiterados intentos por dotar a los decimales no periódicos de un estatus de objeto actual, trascendiendo así su consideración como mero proceso operatorio o como una secuencia de dígitos imposible de controlar -en cualquier caso como un proceso infinito-, en lugar de cómo un objeto matemático, susceptible de ser manipulado y utilizado. Fruto de estos intentos fue el que algunos estudiantes aglutinaran a determinadas longitudes inconmensurables con la unidad- tales como las correspondientes al Número de Oro, a p y a raíces cuadradas- y les asociaran el término "proporción". De esta forma, distinguieron una clase especial de entre todos los decimales infinitos, correspondientes a lo que ellos llamaron proporciones, diferente de aquellos otros decimales infinitos que eran periódicos o que tenían cifras arbitrarias.

Nuestros alumnos dieron así el primer paso de un proceso en el que surge un nuevo objeto matemático, separado del proceso que le dio origen, y que empieza a derivar su significado de ser miembro de una determinada categoría. Es esta categoría la que otorgará, al consolidarse, su estatus de existencia definitivo al nuevo concepto matemático. Si bien los estudiantes con los que trabajamos estaban lejos de tener una conceptualización sólida de los números reales, consideramos un logro que el trabajo didáctico con los sistemas de representación diera lugar, de forma natural, a que surgiera en la comunidad de la clase este tipo de cristalizaciones o consolidaciones.

Para una consideración más específica de estas investigaciones -en las que puedan observarse con profundidad las descripciones de los distintos sistemas de representación mencionados, así como de las actividades asociadas a los mismos que se trabajaron con los alumnos y los resultados obtenidos- remitimos a las referencias de los trabajos de Castro, Rico y Romero.

5. CUESTIONES ABIERTAS

1) El hablar de "objetos matemáticos" o "conceptos" dentro de un universo de conocimiento ideal me sigue resultando un tanto problemático. Concretamente, en el caso de los conceptos numéricos, que son verdaderos sistemas y estructuras numéricas, no resulta fácil la caracterización exhaustiva de todos los entes, operaciones, y relaciones que constituyen dichas estructuras. Es decir, no resulta fácil caracterizar estas parcelas conceptuales dentro del conocimiento ideal y toda la extensión de sus campos semánticos, los cuales vienen establecidos por sus distintos usos. Parece como si no pudiéramos más que realizar aproximaciones sucesivas en este sentido. Estas aproximaciones a una caracterización exhaustiva vendrían mediadas por la persona o personas que las realizan y, en ese sentido, siempre me parecen susceptibles de ser ampliadas y enriquecidas.

Ahora bien, si atendemos a la idea de Fey (1990), de que la estructura de cada sistema viene determinada por un grupo reducido de grandes y potentes ideas, sí que sería factible, y además necesario, contar con la delimitación de éstas para cuántas más estructuras conceptuales mejor. El estudio de los sistemas de representación de dichas estructuras puede seguramente ponernos en la pista de cúales son esas claves. ¿Qué otros parámetros necesitaríamos? ¿Existen procedimientos generales que nos permitan acometer el trabajo para cualquier estructura conceptual?

2) Una vez caracterizadas las estructuras conceptuales que sería deseable que los alumnos aprendieran, lo cierto es que el único medio que tenemos para lograr nuestro objetivo es el trabajo con situaciones didácticas a través de sistemas de representación. Así, tendremos ocasión de observar e interactuar con esquemas de operaciones y redes de significados manifestados a través de representaciones externas, normalmente dentro de la comunidad de la clase. En este punto es esencial recordar que los sistemas de representación son, en realidad, sistemas de comunicación, mediante los cuales construimos y compartimos significados. ¿Qué tipo de comunicación sería deseable establecer en nuestras comunidades de aprendizaje? ¿Cómo podríamos utilizar los sistemas de representación al servicio de una comunicación significativa, que promueva un progreso cognitivo auténtico?
3) Dentro de las actividades asociadas a los sistemas de representación, hemos argumentado la importancia de todas ellas para lograr un dominio de las ideas y estructuras matemáticas representadas. En nuestros trabajos empíricos hemos tratado ampliamente con las tres primeras, es decir con la identificación y formación de representaciones, con las transformaciones dentro de un mismo sistema de representación y con la coordinación entre sistemas. También nos hemos acercado a la actividad de la cristalización, constatando su dificultad. Dada la importancia de la quinta actividad, de modelización, teóricamente explicitada, sería muy deseable contar con estudios empíricos que nos permitieran ilustrar y profundizar en este punto.

REFERENCIAS

Castro Martínez, E. (1994), *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de secundaria (12-14 años).* Granada: Comares.

Coriat, M. y Scaglia, S. ´Representación de los números reales en la recta‘. *Enseñanza de las Ciencias* (en prensa).

Douady, R. (1986). ´Jeux de cadres et dialectique outil-objet‘. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 5-31.

Duval, R. (1993). *Semiosis y Noesis.* Lecturas en Didáctica de la Matemática. Escuela Francesa. Sección de matemática educativa del CINVESTAV-IPN. México.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine.* Berna: Peter Lan.

Fey, J. (1990). Quantity, en Steen, L (ed.). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy*. Washington: National Academy Press.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). ´Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An introductory analysis‘. En *Conceptual and Procedural Knowledge: the case of Mathematics*. Hiebert, J. (ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). ´Learning and teaching with understanding‘. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws, D.A. (Ed.). New York: MacMillan Publishing Company.

Janvier, C; Girardon, C. y Morand, J. (1993). ´Mathematics Symbols and Representations', en Wilson, P. (ed.) *Research Ideas for the Classroom. High School Mathematics* (pp. 79-102) Reston VA: NCTM.

Kaput, J. (1987). ´Representation Systems and Mathematics'. En Janvier, C. (ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of mathematics.* New Jersey: LEA. Hillsdale.

Kaput, J. (1992). ´Technology and Mathematics Education´. En En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws, D.A. (Ed.). New York: MacMillan Publishing Company.

Lesh, R. (1997). ´Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones`. *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 15 nº 3.

Romero I. y Rico, L. (1996). *Sobre la introducción del concepto de irracionalidad en enseñanza secundaria: el caso de ÷2.* Educación Matemática, vol. 8, nº2, 18-33.

Romero Albaladejo, I. (1997). *La introducción del Número Real en Educación secundaria: una experiencia de investigación-acción.* Granada: Comares.

Romero I. y Rico, L. (1999). *Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en Secundaria.* Revista EMA, vol. 4, nº2, 117-151.

Ruíz López, F. (2000). *La tabla 100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Scaglia, S. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Sfard, A. (1991). ´On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin'. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Vergnaud, G. (1990). 'Théorie des champs conceptuels´. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*

Vergnaud, G. (1993). La teoría de los campos conceptuales. En Sánchez, E. Y Zubieta, G. (eds.), Lecturas en Didáctica de la Matemática. Escuela Francesa, pp. 88-117. CINVESTAV-IPN. México, D.F.

Comentario al Trabajo: Seminario Representación – Comprensión de Isabel Romero

Luis Rico Romero
Universidad de Granada

Este trabajo se estructura en una introducción y cuatro apartados:

En la introducción sitúa los estudios en torno a las representaciones y los del grupo Pensamiento Numérico y Algebraico. Explicita su marco teórico y el objetivo de continuar alguna de las ideas presentadas por el coordinador.

Los apartados y sus principales contenidos son:

1. Cuestiones Ontológicas y Psicológicas

En este apartado discute las nociones básicas de representación y comprensión. Asume la dualidad de representaciones externas y mentales o internas.

2. Cuestiones Didácticas

Plantea algunos problemas didácticos derivados de la escasa reflexión didáctica sobre sistemas de representación y amplía las reflexiones teóricas.

3. Ejemplificación del uso de las representaciones para caracterizar comprensión de los estudiantes en nuestras investigaciones.

   Muestra dos investigaciones que han utilizado el marco teórico anterior.

   3.1 Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales con alumnos de secundaria.

   3.2 Introducción al concepto de número real en secundaria.

4. Cuestiones abiertas

Cierra el trabajo con la consideración de tres cuestiones que considera problemáticas.

1. Cuestiones Ontológicas y Psicológicas

Planteamiento ontológico; dualidad representante- representado y problemas que genera. Este planteamiento no resulta necesario para estudiar la comprensión.

El estudio se puede plantear desde la psicología: efectividad de la mente humana para manejar ideas y procesos. Nueva dualidad: mental- físico.

La autora muestra indecisión a la hora de pronunciarse sobre las dicotomías anteriores; algunas reflexiones.

Objetos matemáticos: conceptos y estructuras numéricos, constructo teórico: aceptación a efectos prácticos.

Predominio de la utilidad, coherencia, capacidad de explicación y acuerdo intersubjetivo.

Mundo mental; representaciones internas: operaciones y estructuras mentales y concepciones de los objetos matemáticos.

Mundo físico; representaciones externas: sistemas de notación o sistemas semióticos. Funciones: reglas para identificar o crear caracteres, operar y determinar relaciones. Tipos.

Utilidad de las representaciones internas para dotar de significado a las actividades que realizan los individuos cuando manipulan signos.

El carácter pragmático de esta aceptación es excesivamente simplificador; la postulación de representaciones tiene otras ventajas y potencialidades; pero también hay que conjurar peligros que no se mencionan.

Actividades asociadas a los sistemas de representación externos:

- formación de representaciones identificables en un sistema dado;
- transformación dentro de un sistema de representación; respeto de reglas sintácticas;
- traducción entre sistemas de representación mediante coordinación entre los sistemas;
- consolidación de relaciones y procesos en objetos conceptuales (¿cual es la referencia?);
- modelización; construcción y prueba de modelos matemáticos.

Excesivamente seguro; faltaría alguna referencia en cada caso para el lector no especialista.

La noción de comprensión que acepta es la de Hiebert y Carpenter. El conocimiento como red conexa.

Criterio para evaluar la comprensión de un sujeto. Manifestación mediante los sistemas de representación y actividades asociadas.

2. Cuestiones Didácticas

Escasez de actividades relacionadas con la variedad de sistemas de representación. Enfoca los dos primeros tipos mencionados. Limitaciones derivadas.

Problemas de comprensión. Irreductibilidad de los sistemas de representación. Interés de la traducción entre sistemas. Ventajas que puede presentar un sistema sobre otros.

Complementariedad de los sistemas; parcialidad cognitiva de cada sistema. División por tipos de los sistemas de representación. Relevancia de la visualización: no destacada suficientemente.

Conceptualización: coordinación en integración de registros de representación (¡no sólo de registros!).

Interiorización de sistemas de representación. Cristalización de relaciones. Crecimiento de las redes conceptuales.

Unificación semántica de varias representaciones de un mismo concepto: constructo abstracto.

Sobrevaloración de los sistemas de representación en la cristalización de conceptos.

Papel de la modelización. Uso de una diversidad de representaciones que interactúan en los procesos de modelización. Dinamicidad de estos procesos.

En este apartado no se diferencia bien entre lo que son supuestos, conjeturas e interpretaciones de un marco teórico determinado de lo que son problemas y cuestiones didácticas cuyo estudio se quiere abordar mediante ese marco. Hay algunos saltos, que debieran resolverse mediante refinamiento de la teoría.

3. Ejemplificación del uso de las representaciones para caracterizar comprensión de los estudiantes en nuestras investigaciones

Trabajos realizados en el grupo PNA; énfasis en la pluralidad de sistemas de representación. Potencialidades y dificultades encontradas.

3.1 Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales con alumnos de secundaria.

Objetivo del estudio. Sistema de representación utilizados.

Dominio de los escolares con las representaciones puntuales. Coordinación de sistemas de representación.

Desarrollo y potencialidad alcanzados mediante la complementariedad. Dificultades surgidas en la coordinación: la expresión del término general.

3.2 Introducción al concepto de número real en secundaria.

Objetivo del estudio. Sistemas de representación utilizados.

Identificación y manejo de sistemas. Traducción: fenómenos observados.

Dificultades de integración entre las diferentes facetas mostradas por los distintos sistemas: problemas de cristalización. Progresos detectados.

4. Cuestiones abiertas

Plantea tres de las cuestiones que muestran mayor conflictividad.

1. Considera problemática la caracterización de los objetos o conceptos matemáticos en un universo ideal teniendo en cuenta la diversidad de usos y campos semánticos.

Apunta la necesidad de reducir la estructura de cada sistema a un grupo reducido de grandes y potentes ideas.

2. El aprendizaje de los alumnos. Trabajo en situaciones didácticas mediante sistemas de representación. Los sistemas son sistemas de comunicación para construir y compartir significados. Parece apuntar a la interacción de los escolares mediante el uso de diversos sistemas de representación, pero no entra en esta cuestión.
3. Actividades asociadas a los sistemas de representación empleadas en los trabajos empíricos. Necesidad de ampliar los estudios empíricos a las otras actividades.

Representaciones y comprensión en el profesor de matemáticas

VICTORIA SÁNCHEZ[1]
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En esta presentación, nos centramos en como la forma de conocer un contenido matemático, entendida como la representación mental que el profesor tiene del mismo, influencia lo que los profesores consideran importante aprender y cómo estructuran las actividades de aprendizaje. Desde esta perspectiva, es importante analizar las relaciones entre dicha representación y lo que los profesores destacan cuando estructuran esas actividades. Estas relaciones pueden ser mostradas cuando el profesor transforma la materia con el propósito de la enseñanza. Aquí expondremos un ejemplo concreto que ilustra estos aspectos en el desarrollo de una unidad didáctica sobre semejanza de un profesor de Secundaria.

1. INTRODUCCIÓN

Dependiendo del contexto y del dominio matemático, 'representación' dentro de las investigaciones desarrolladas en Didáctica de las Matemáticas puede utilizarse en varios sentidos específicos, algunos de los cuales están siendo presentados en este seminario. Centrándonos en aquellos trabajos que se ocupan conjuntamente de 'representaciones' y 'profesores', suele aparecer en ellos de una forma general un especial énfasis en aclarar en qué sentido y con qué significado se está utilizando la palabra 'representación'. Esta aclaración no es algo trivial, ya que condiciona las preguntas que se plantean los investigadores y, consecuentemente, la forma de buscarles una respuesta.

Algunos investigadores emplean el término 'representación' para designar herramientas con la ayuda de las cuales es posible a los profesores mostrar la

1. Miembro del Grupo de Investigación en Educación Matemática (GIEM) de la Universidad de Sevilla (FQM-226).

encarnación (personificación) de los objetos matemáticos (Leinhardt et al., 1991). Al examinar como los profesores utilizan su conocimiento de la materia, considerado desde una perspectiva de la enseñanza como una destreza cognitiva compleja que ocurre en un entorno dinámico relativamente mal estructurado (Leinhardt & Greeno, 1986), se centran en varios puntos clave del proceso instruccional de los profesores como agendas, guiones curriculares, explicaciones y representaciones, señalando que:

'En la construcción de explicaciones, los profesores utilizan varias representaciones de la información que es su objetivo. Las representaciones son objetos físicos o conceptuales o sistemas de objetos que dan forma perceptible a ideas o entidades matemáticas (operadores), por ejemplo usando bloques multibase de Dienes para el valor de posición para enseñar la resta reagrupando o diagramas sombreados para enseñar fracciones. Comprender cuando una representación particular es apropiada y ser conscientes de los aspectos más sutiles de cada representación son ejemplos específicos del conocimiento del la materia del profesor' (Leinhardt et al., 1991, p. 90).

Bajo esta perspectiva, se entienden las representaciones como sistemas de símbolos que utiliza el profesor a la hora de presentar conceptos u otros aspectos. Para Leinhardt y sus colaboradores las representaciones utilizadas por los profesores *'permiten 'ver' aspectos muy detallados y sutiles de cómo los profesores entienden un particular tópico matemático'* (Leinhardt et al., 1991, p.106). Estos autores utilizan las representaciones para 'dar presencia' a las ideas matemáticas, y las cuestiones que se plantean en la paradoja primera planteada en la presentación inicial (dualidad representante-representado), se aumentarían en el sentido de tratar de profundizar en el papel del profesor en ese paso representante-representado.

Otros autores amplían la idea de representación mas allá del sistema de símbolos empleado, entendiendo que los profesores están constantemente involucrados en un proceso de construir y usar '*representaciones instruccionales*' del conocimiento de un contenido y utilizando este término para indicar '*un amplio rango de modelos que pueden comunicar algo sobre la materia para el aprendiz: por ejemplo, actividades, preguntas, ejemplos y analogías*' (McDiarmid et al, 1989, p. 194). Ellos mismos aclaran que no se están refiriendo al término representación en el sentido de una representación mental que los aprendices construyen por sí mismos conforme ellos aprenden, o que los profesores tienen que dan forma a su enseñanza, subrayando en este último caso la crítica incidencia de la comprensión del contenido de los profesores en estas representaciones instruccionales

Precisamente en algunos trabajos como los de Wilson et al. (1987) se presta especial interés al '*conjunto de actividades desarrolladas por el profesor para pasar de su propia comprensión de una materia y las representaciones más convenientes a esa comprensión a las variaciones de representación, narrativa, ejemplo, o asociación apropiada para iniciar comprensión por parte de los estudiantes*' (p.113). Para nosotros, dentro de esa comprensión tiene especial importancia la *forma de conocer un contenido matemático (entendida como la represen-*

tación mental que el profesor tiene del mismo), ya que puede influenciar lo que los profesores consideran importante aprender y cómo estructuran las actividades de aprendizaje.

Desde nuestra perspectiva, es importante analizar las relaciones entre los diferentes aspectos del conocimiento de la materia para la enseñanza que se integran en esa comprensión y lo que los profesores destacan con relación a los modos de representación usados (en el sentido de sistema de símbolos) y su gestión cuando estructuran dichas actividades. Estas relaciones pueden ser mostradas cuando el profesor transforma la materia con el propósito de la enseñanza, es decir, en el proceso de razonamiento pedagógico, entendido como '*el proceso de transformar la materia en formas que son pedagógicamente poderosas y sin embargo adaptables a las variaciones en habilidad y base presentadas por los estudiantes*' (Shulman, 1987, p.15). Este razonamiento pedagógico es específico de la enseñanza.

Nos situamos por tanto en una representación mental (en el sentido de reproducir en la mente indicado en la ponencia inicial), compartiendo algunas de las cuestiones mencionadas en la segunda paradoja planteada al comienzo de este seminario. Entendemos que la representación mental no sólo se sitúa en lo cognitivo, sino que debe ser analizada en sus múltiples y complejas conexiones con la actividad del sujeto.

2. ENMARCANDO UN PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Shulman y sus colaboradores (Wilson et al, 1987) han desarrollado un modelo teórico que describe el proceso de razonamiento pedagógico y la acción a través de lo que ellos consideran seis aspectos comunes del acto de enseñanza: comprensión, transformación, instrucción, evaluación, reflexión, nueva comprensión. Este modelo de razonamiento pedagógico va a ser el marco que nos permita mostrar la transformación del contenido con el propósito de la enseñanza, posibilitándonos estudiar la relación entre la forma de conocer el contenido matemático del profesor y los aspectos de dicho contenido que enfatiza, la elección de las tareas y el uso que hace de ellas en las situaciones del aula.

En particular, aquí nos vamos a situar en las dos primeras componentes. En relación a la *comprensión* del profesor del contenido matemático (considerada como la integración e interconexión de los conocimientos y otros aspectos relacionados con aquello que se comprende), centraremos nuestra atención en lo que el profesor considera importante para organizar el contenido que presenta a sus alumnos, y los diferentes usos que el profesor atribuye a los modos de representar conceptos matemáticos, de lo que se pueden inferir rasgos que nos ayudan a aproximarnos a su forma de conocer el contenido. Ahora bien, no hay que olvidar que esos aspectos están enmarcados dentro de unas concepciones de carácter más general sobre lo que significa enseñar una materia, que de alguna manera pueden definir los objetivos e influenciar la toma de decisiones (Grossman, 1990). Por ello, se incluyen también dentro de esta componente aquellas concepciones que están relacionadas más específicamente con lo que el profesor piensa sobre el contenido matemático para los estudiantes (lo que deberían aprender sobre las matemáticas y la naturaleza de las matemáticas).

La segunda componente, la *transformación*, comprende cuatro subprocesos que globalmente considerados tienen como objetivo generar un plan de acción específico para la enseñanza de un contenido determinado. El primero de ellos, la interpretación crítica, involucra la revisión de materiales instruccionales a la luz de la propia comprensión del contenido matemático. El segundo, repertorio representacional incluye las formas alternativas de presentar el contenido (diferentes modos de representación utilizados y cómo se justifica su uso). Por último, el considerar las características de los alumnos en general (los errores, las dificultades, etc.) y de alumnos de la clase concreta en particular correspondería a los subprocesos tercero y cuarto dentro de esta componente, que son la adaptación y el ajuste. Aquí no nos vamos a ocupar específicamente de estos dos últimos subprocesos, aunque en ocasiones interrelacionan con las decisiones tomadas en los anteriores.

3. EJEMPLIFICACIÓN DE LA NOCIÓN DE REPRESENTACIÓN ADOPTADA EN INVESTIGACIONES CONCRETAS

Dentro de nuestro grupo de investigación, tanto en la línea de aprender a enseñar (Llinares y Sánchez, en revisión) como en nuestros trabajos sobre el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas en acción (ver García, 1997; Llinares, 1999, 2000; García & Llinares, 1999), se ha puesto de manifiesto como la forma de conocer el profesor (o futuro profesor) el contenido matemático influencia su toma de decisiones instruccionales, condicionando el proceso de enseñanza/aprendizaje. Apoyándonos en la información obtenida en algunas de nuestras investigaciones (Escudero & Sánchez, 1999a,b), aquí vamos a tratar de caracterizar es la relación entre la forma de conocer el profesor el concepto matemático como objeto de enseñanza/aprendizaje (su representación mental del mismo) y el uso de los modos de representación (entendidos en el sentido de sistemas de representación utilizado en la ponencia presentada por la Dra. Romero en este mismo seminario), y las justificaciones dadas a ese uso. Intentaremos presentar diferentes aspectos de esa relación a través de un ejemplo, extraído de una serie de entrevistas a un profesor de Secundaria, Daniel, sobre su unidad didáctica sobre la semejanza en un curso de 3º de ESO. La hipótesis que subyace es que la secuencia adoptada, tareas escogidas y uso de ellas definen distintas formas de introducir el concepto, influenciando una determinada presentación del mismo a los alumnos.

3.1 La comprensión del profesor de la semejanza

Daniel ve el concepto de semejanza como un modo de conectar la 'visión numérica abstracta con imágenes gráficas', siendo para él 'la semejanza, entre otras cosas, es una ocasión para que los alumnos distingan que algo es proporcional'. Esta forma de conocer la semejanza, que enfatiza la conexión entre los aspectos numérico/algebraico y gráfico del concepto, se pone de manifiesto cuando piensa en su enseñanza en el uso que hace de diferentes perspectivas relacionadas con los problemas que tiene seleccionados, destacando siempre en sus comentarios sobre ellos la inclusión de diferentes tipos de configuraciones y variaciones que presentan en los aspectos numérico/algebraicos. Al situar el énfasis en los aspectos numérico y geométrico en el concepto de semejanza, Daniel considera en la secuencia de enseñanza las traslaciones dentro del modo de representación gráfico como un medio para reconocer el concepto en distintas presentaciones figurales, estableciendo asimismo traslaciones dentro del modo de representación numérico/algebraico. En dicha secuencia, las actividades de traslación entre ambos modos de representación son un medio para establecer las conexiones pretendidas. El uso de los problemas, modos de representación y los diferentes roles que éstos juegan en la enseñanza recogen su consideración de la semejanza (con el propósito de la enseñanza) como un contexto para visualizar la proporcionalidad.

Junto con esta idea de 'comprender la proporcionalidad en el contexto de la semejanza', entre las ideas importantes que Daniel quiere 'afianzar' en sus alumnos destaca la importancia de que los alumnos reconozcan figuras semejantes. La trascendencia que para él tiene visualizar a través del dibujo lo que significa la semejanza de figuras y el posterior paso a la expresión numérica se refleja cuando trata de representar el contenido matemático para los alumnos, como se infiere del siguiente protocolo: 'para mí, a estos niveles, la idea de semejanza podríamos decir que son figuras con una misma forma, unas mismas proporciones... son las figuras semejantes, pero que luego eso lo sepan transcribir a un lenguaje matemático'. Señala la particularidad que tiene el triángulo en el sentido de que 'basta que se fijen en sus ángulos o basta que se fijen en los lados y no son necesarias las dos cosas' frente a 'lo que seria semejanza en cualquier otro tipo de figuras geométricas'.

También destaca que 'la semejanza de figuras es independiente de la posición que tengan las figuras, o sea, que yo muevo las figuras y siguen siendo semejantes'. Esta forma de comprender la idea de figuras semejantes subraya la relación que se establece entre figuras y corresponde a una visión de la semejanza como relación intrafigural, implicando una potenciación del modo de representación gráfico, de modo que permita la adquisición de un buen grado de visualización para lograr la identificación pretendida. Es precisamente la particularidad que ve en la semejanza relacionada con la presentación de figuras en distintas posiciones lo que le lleva a considerar que permite detectar problemas de lateralidad vinculados a dificultades de organización del plano, y aunque considera que esto lo cumple la geometría en general, se da especialmente en la semejanza por el hecho de que 'se cambien las posiciones de figuras'.

Con los párrafos anteriores no hemos pretendido en absoluto entrar en un análisis detallado de la comprensión de la semejanza de Daniel. Simplemente, dentro de esa comprensión, inferimos como rasgos clave de su forma de conocer la semejanza como objeto de enseñanza/aprendizaje: considerarla un contexto para visualizar la proporción y un medio de establecer una conexión entre lo numérico y las imágenes gráficas, que nos sirven de referente para abordar el proceso de transformación.

3.2 La transformación del contenido matemático para la enseñanza

El plan para la unidad didáctica de semejanza que el profesor ha preparado y las razones que proporciona muestran la influencia de su forma de conocer la semejanza (junto con otras concepciones sobre la enseñanza aprendizaje mas generales). Los subprocesos considerados en la componente 'transformación' dentro el modelo de razonamiento pedagógico anteriormente mencionado nos permiten organizar nuestro análisis. A lo largo de este apartado iremos presentando en primer lugar la interpretación crítica, inferida de la organización del contenido en el plan para la lección (que características del concepto identifica y en que orden las presenta). En segundo lugar, nos ocuparemos del repertorio representacional, a partir de los datos obtenidos de las formas alternativas de presentar el contenido matemático y en la forma de concretar los objetivos que se pretenden con las tareas que va indicando.

* *Interpretación crítica*: En coherencia con su forma de conocer la semejanza anteriormente mencionada, Daniel considera importante que los alumnos relacionen a través de ese concepto la idea de proporción numérica con imágenes gráficas. Dos características emergen en sus decisiones y elecciones curriculares que determinan como estructura sus actividades de aprendizaje: conectar la proporción con su visualización en figuras geométricas y considerar que los contenidos del tema son prácticamente los mismos que se han dado en cursos anteriores, aunque con 'un nivel superior de formalización' (el que aquel año sus alumnos hayan pasado a tercero de ESO habiendo cursado los dos años anteriores en un centro de Primaria le lleva a no estar demasiado seguro de lo realmente dado). Para él 'no es un tema nuevo', y por lo tanto no se trata de introducir nuevos contenidos, sino relacionar los ya dados, en concreto: proporcionalidad numérica (dada por él en el tema anterior), semejanza (contenido tratado en años anteriores) y Thales (ya que 'han oído hablar del teorema'). Daniel considera como punto de partida que los alumnos lleguen a una formalización del teorema estableciendo relaciones entre esos contenidos y la división de un segmento en partes iguales (que están aplicando este año en tecnología y dibujo), porque 'aunque la semejanza podría ir antes de... quizás antes del teorema de Thales, pero prefiero enlazar con algo que... sea a ellos más próximo y después, como a partir del teorema de Thales y de forma natural probablemente... bueno, natural, no, buscada a través de alguna de las actividades, vendrá la idea de semejanza...'.

Por ello, sitúa como punto de partida en la secuencia de enseñanza problemas que plantean situaciones reales que, además de motivar, permitan a los alumnos reconocer en ellas los contenidos anteriormente mencionados. El primero, sacado de un manual de montañismo, plantea en sus dos apartados la justificación de la relación existente entre unas distancias que se mencionan en el texto. Para ello es necesario identificar esas distancias como lados de triángulos semejantes, estando cada uno distintas configuraciones geométricas de pico y mariposa (Lemonidis, 1991). El segundo problema plantea en un primer apartado la relación existente entre aviones y sus sombras, y demanda el cálculo de la longitud de uno de ellos; en los otros dos apartados se pide representar las dimensiones de los aviones por letras y recordar el nombre de la relación entre los segmentos, indicando explícitamente en su último apartado que se establezca una relación con el procedimiento de dividir un segmento en partes iguales. El modo de representación que Daniel utiliza para identificar las relaciones es por tanto la situación real, produciéndose un traslado al modo de representación gráfico; en él debe producirse la identificación de lados homólogos o segmentos correspondientes, como paso previo a la traslación al modo de representación numérico/algebraico en el que se desarrolla la justificación. Para él, estos problemas le van a permitir hacer explícitas las condiciones que permiten una aplicación del teorema y dar su expresión formal.

Reconocer esas condiciones permite para Daniel aplicar la fórmula, por lo que sitúa en la secuencia de enseñanza 'ejercicios que permitan aplicar el teorema y su consecuencia'. En los problemas seleccionados coexisten dos criterios: presentar directamente distintas configuraciones de Thales (sin situaciones reales), sobre las que identificar los datos numérico/algebraicos (del mismo modo que en los problemas anteriores) y posibilitar el reconocer que con estos datos se puede aplicar la fórmula dada.

Así, por ejemplo, en el primero de los problemas que tiene preparados, el enunciado indica que se trata de configuraciones de Thales. Las configuraciones se presentan en forma de pico; las dos primeras presentan datos numéricos, y se pide calcular los valores que corresponden a las incógnitas, mientras que el tercer apartado los segmentos vienen dados en forma algebraica y se pide expresar una relación entre las variables. Se relaciona de este modo un determinado modo de representación geométrico (una configuración en pico) con diferentes posiciones de los datos numéricos, que se sitúan sobre las secantes en el primer apartado y sobre secantes y paralelas en el segundo, con lo que se presenta tanto el aspecto proyección como el de homotecia, y un paso de datos numéricos a algebraicos. Pero lo que es importante destacar es el uso que se hace de los modos de representación: se prescinde en el enunciado de la situación real (haciéndose explícito que se trata de una configuración de Thales), presentándose directamente en el modo de representación gráfico la identificación de los datos numérico/algebraicos con los correspondientes segmentos sobre la configuración y pidiendo directamente el cálculo del valor numérico o la justificación. En otro de los problemas preparados se dan tres segmentos a, b y c y se pide encontrar con instrumentos de dibujo un cuarto segmento x que verifique a/b=c/x (cuarta proporcional) y otro y que cumpla a/b=b/y (tercera proporcional). Esta tarea implica una traslación del modo de representación algebraico al geométrico, y un trabajo dentro de este modo de representación apoyándose en la construcción.

Considerados globalmente estos problemas y los otros que Daniel tiene preparados (que para él como las anteriores deben ser planteadas a los alumnos en forma conjunta para su trabajo en grupo y posterior discusión), presentan para Daniel los aspectos necesarios para establecer la conexión entre los aspectos numérico y geométrico de la proporcionalidad, por lo que 'pasado ese primer bloque de actividades del teorema de Thales' incorpora ahora otro aspecto de su forma de conocer la semejanza como objeto de enseñanza/aprendizaje: la idea de la semejanza de figuras como relación intrafigural. Daniel señala que 'yo sería quien les preguntaría a ellos que idea tienen de semejanza, en función de cursos anteriores, o bien lo que la palabra figuras semejantes les pueda decir a ellos', indicando que: 'me ha pasado en otros cursos, aunque no sea de estos niveles, cuando pregunto que ideas tienen de figuras semejantes te dicen que parecidas, entonces un poquito centrar parecidas en qué sentido...', para llegar a precisar la importancia de 'mantener las proporciones'.

Sus decisiones y elecciones curriculares se fundamentan ahora en la importancia que da a la presentación de la semejanza de figuras a partir de una comparación entre ellas, vinculada a lo que significaría mantener la proporción en esa comparación, y se concretan en figuras geométricas ya que 'como no nos vamos a centrar... no podemos dedicarnos a la semejanza de todo tipo de figuras, pues nos vamos a dedicar a figuras más geométricas'. Para establecer esta comparación utiliza en primer lugar problemas en los que se presentan triángulos. Así, por ejemplo, en uno de los problemas seleccionados se dan dos triángulos en posición de Thales y se incluyen sobre el dibujo como datos las medidas de los segmentos sobre las secantes, pidiendo una comprobación de la proporcionalidad de lados homólogos (paso de segmentos identificados sobre la figura a expresión algebraica de la proporción). En otro de ellos se mantiene la representación en pico, pero dos lados se dan como datos numéricos y se pide la relación entre otros, señalando expresamente el enunciado que se identifique con algún ejercicio similar realizado al principio del tema. Para él, estos problemas 'deberían ir... sí, como aplicación de la semejanza de triángulos...'.

En el uso que en estos problemas hace del modo de representación gráfico para desarrollar los significados pretendidos, las figuras se reconocen expresamente como triángulos y se consideran 'figuras separadas' que se comparan, aunque formen parte de una misma configuración. Por ejemplo, una determinada representación gráfica (dos triángulos en una configuración de pico con datos numéricos e incógnita sobre los lados) que en el bloque anterior de problemas se usaba para calcular el valor de la incógnita en este bloque de tareas se utiliza para comprobar que los triángulos tienen los lados homólogos proporcionales por lo que, a diferencia del caso anterior se hace ahora explícito en el enunciado que dos de los lados son paralelos, (lo que en el caso anterior se consideraba implícito en el dibujo). La visión de la semejanza como relación intrafigural también se pone de manifiesto en los problemas que tiene seleccionados para la introducción de la semejanza de polígonos, en las que destaca de nuevo el papel de lados y ángulos como elementos que permiten establecer la distinción entre la semejanza de triángulos y la de los otros polígonos.

Otra característica de su forma de conocer en relación a la semejanza de figuras es la importancia de su identificación variedad de posiciones de los triángulos. Para ello, utiliza un problema en el que se da un triángulo rectángulo en el que se ha trazado la altura correspondiente a la hipotenusa y, por el punto de intersección de ambas, la paralela a un cateto. Se pide nombrar el máximo número de triángulos semejantes que se encuentran en la figura, razonando la repuesta. Este problema le va a permitir un reconocimiento de la semejanza de triángulos en base a la igualdad de ángulos y, como el mismo indica, conectar con los teoremas del cateto y de la altura. Para ello, prescinde del modo de representación numérico/algebraico, siendo la representación gráfica que presenta el problema la que le permite desarrollar estos significados.

En líneas generales, podríamos decir que las decisiones curriculares de Daniel se han caracterizado por la coexistencia de la vinculación de la idea de semejanza como un contexto para profundizar en la proporcionalidad numérica (puesta de manifiesto en el modo de introducir y aplicar del teorema de Thales) y la semejanza de figuras como comparación intrafigural (introducida partir de figuras parecidas – semejantes). Para él, lo que significa 'aplicar' un teorema o concepto ya formalizado implica el reconocimiento de unas condiciones en variedad de modos de representación gráfico. Esto influencia la elección que hace de los problemas, en los que se incluyen gran variedad de representaciones geométricas (formas de pico y mariposa), añadiendo posiciones no estándar de triángulos semejantes (vinculadas a la importancia que concede a la presentación de figuras en distintas posiciones). Por último, en los problemas seleccionados se pone de manifiesto como interrelacionan la variación de aspectos numéricos y geométricos, que caracterizan el objetivo de cada grupo de tareas, con las dificultades de los aprendices, haciendo explícito que son estas dificultades la que van condicionando la secuenciación dentro de cada bloque de tareas (por ejemplo, dentro de una misma configuración, primero tareas con datos numéricos y luego con letras).

**Repertorio representacional*: Formas alternativas de presentar el contenido que el profesor utiliza, y aspectos de las tareas seleccionadas que el profesor destaca para lograr sus objetivos.

En este apartado, situamos el énfasis sobre la actividad que puede ser generada cuando se establecen relaciones entre los modos de representación, poniendo de manifiesto el 'espacio' que define el profesor para gestionar la relación entre distintos modos de representación: situaciones, marco geométrico (con sus diferentes manifestaciones según la forma en que se presentan las figuras) y símbolos como un medio para conseguir su objetivo. En el caso de la identificación de contenidos que llevan a la formalización del teorema de Thales, concentrándonos en el papel que Daniel da a los diferentes modos de representación en la secuencia de enseñanza, su presentación destaca la importancia que para él tiene reconocer y conectar unos contenidos ya dados. Para ello, selecciona problemas que presentan situaciones reales, justificando la elección de los mismos en base a que el alumno 'vea que las matemáticas están mas cerca de la vida real', y que '(en el primer apartado) tienen que aplicar directamente el teorema de Thales (contenido que considera ya dado) y en el otro (el segundo apartado) lo pueden aplicar, pero cambiando la posición de los triángulos e insistiendo en que 'tienen que justificar matemáticamente por que se procede de esa forma'. Aquí se utiliza la situación real como un contexto en el que se puede establecer el reconocimiento de unos contenidos matemáticos (y no como modo de representación), estableciéndose a partir de ese reconocimiento traslaciones dentro y entre modos de representación gráfico y numérico. La presentación se completa con un segundo problema, que es para Daniel 'de proporcionalidad entre longitudes de aviones y su sombra [...] entonces hay un momento que ellos dicen 'aplico la regla de tres', y hay otro momento en que se les pide que generalicen ... [...] ... el objetivo de esta tarea es que salga el teorema de Thales con su formulación matemática incluida...'. En la traslación de la situación real al modo gráfico, este segundo problema permite conectar esa situación con una configuración en pico en la que aparecen letras, poniéndose el énfasis en la traslación del dibujo a los símbolos algebraicos; esto le va a permitir llegar a la formulación matemática estándar del teorema. El modo de representación gráfico se utiliza para favorecer la identificación de la presentación clásica del teorema de Thales a través del uso de una representación gráfica prototípica (la configuración en pico), dando a través de ella 'pistas' que ayuden a favorecer la identificación pretendida.

Las presentaciones geométricas anteriormente consideradas se amplían en los problemas seleccionados con el objetivo de aplicar el teorema (ya dado en su forma estándar) con otras 'donde se vea que... pueden planteárseles dificultades... o bien porque no se les dice previamente que es una configuración de Thales, o bien porque las rectas se cruzan, y aquí vuelve a aparecer de nuevo la organización del plano y la lateralidad', conectando con dificultades del aspecto numérico al indicar que 'el hecho de que las rectas se crucen, entonces, al establecer la proporción, primero tienen que poner arriba unos segmentos que están a la derecha y luego los que están a la izquierda, porque están en la misma recta, eso a ellos les cuesta trabajo'. Además comenta 'esa misma actividades las he trabajado con otros alumnos de otros niveles y la dificultad siempre está ahí'. Podemos apreciar un cambio en la gestión de la relación entre los modos de representación: se prescinde de la situación, y las traslaciones entre las distintas configuraciones que se utilizan en el modo de representación gráfico se usan ahora para reconocer los datos en posiciones en las que el profesor 'sabe' que este reconocimiento presenta una especial dificultad (seleccionadas teniendo en cuenta la información recogida de otros aprendices con respecto a las dificultades concretas que presentan); como en el caso anterior, la proporción sigue estableciéndose en base a una traslación entre los segmentos identificados sobre el dibujo y sus correspondientes valores, pero se inicia una aproximación al paso inverso (dados los segmentos pasar al dibujo) por medio de la construcción.

Otra característica de la forma de establecer la relación dentro del modo de representación gráfico (y entre éste y el numérico) se presenta en la gestión que hace de los diferentes modos de representación como medio aproximarse a la semejanza de figuras desde la perspectiva de relación intrafigural. En el caso de los triángulos, dentro del modo gráfico la comparación se establece entre ellos (que se consideran por separado formen o no parte de una misma configuración) y dentro del numérico la proporción se establece en base a la identificación de los lados homólogos, destacando la independencia de la semejanza de la posición en la que se presenten los triángulos semejantes. De lo que enfatiza en los problemas se infiere que para él permiten mostrar la particularidad del triángulo, en el sentido de que 'basta con que se fijen en los ángulos o basta con que se fijen en la proporcionalidad de los lados, y no son necesarias las dos cosas'.

Así, por ejemplo, Daniel justifica el uso de uno de los problemas seleccionados para este objetivo indicando que en él 'se da un triángulo rectángulo cortado por la altura correspondiente a la hipotenusa y que encuentren triángulos semejantes .. la finalidad, el objetivo de esto es que manejen triángulos semejantes se les ponga en la posición que se les ponga' señalando que su objetivo con esta tarea es 'que los triángulos semejantes no los vean siempre así, con sus lados homólogos paralelos'. Este problema le permite conectar con otros contenidos, ya que 'como ahí los triángulos no están en la misma posición... creo que les puede aclarar bastante la idea y además es el momento de pararse […] y darle forma al teorema del cateto y al de la altura'. La importancia de la comparación en base a lados y ángulos vuelve a apreciarse en los aspectos que destaca en los problemas que ha seleccionado para la aplicación de la semejanza de polígonos, en las que se incluyen diferentes polígonos para 'ver si ellos se dan cuenta que se tienen que fijar en los ángulos y los lados …'.

En este apartado se ha ido poniendo de manifiesto como el profesor gestiona los diferentes modos de representación para lograr la articulación pretendida entre los aspectos numéricos y gráficos que permiten para él la visualización en contexto geométrico de la proporcionalidad y de la semejanza de figuras, en coherencia con los aspectos destacados en apartados anteriores de su forma de conocer estos conceptos. A través de las traslaciones establecidas entre las diferentes formas de presentación geométrica en las representaciones gráficas y las variaciones en los aspectos que se destacan en la representación numérico/algebraica, el profesor intenta relacionar la actividad generada en el modo de representación gráfico con el numérico/algebraico, apreciándose a en sus justificaciones los intentos de potenciar ambos modos de representación.

4. CUESTIONES ABIERTAS

A lo largo de este trabajo hemos intentado mostrar un ejemplo de como la forma de conocer de un profesor un contenido matemático como objeto de enseñanza/aprendizaje influencia el proceso de presentación del mismo. Hemos tratado de identificar el papel jugado por dicha forma de conocer en ese proceso, poniendo de manifiesto la relación que se establece entre su aproximación al concepto de semejanza y los aspectos que él destaca, la secuenciación escogida, los tipos de problemas seleccionadas, la organización de las actividades de aprendizaje, los modos de representación usados y lo que se pretende con ellos. Reconocido este papel, cabría entonces preguntarse si esto nos ayudaría a responder a cuestiones como ¿qué lleva a un profesor a organizar de una manera determinada el contenido matemático a enseñar?, ¿a seleccionar determinadas tareas?, ¿a potenciar el uso de un sistema de símbolos frente a otro?…. Porque lo que está claro es que todo esto va a condicionar lo que sus alumnos aprenden. Todo esto, junto con el papel jugado por el conocimiento del profesor de las dificultades de los alumnos en la toma de decisiones en el proceso de transformación, (importancia que ya ha sido señalado en trabajos como el de Even & Tirosh (1995)) nos lleva a reflexionar sobre contenidos específicos que deben forma parte de los programas de formación de profesores y abre para todos nosotros nuevas vías de debate e investigación. Si, siguiendo a Wilson et al., 'creemos que la transformación del conocimiento de la materia está en el corazón de la enseñanza en las escuelas de secundaria. El conocimiento de la materia del individuo, además, juega un importante papel en este proceso' (Wilson et al, 1987, p.117), abordar desde distintas perspectivas la forma en la que el profesor conoce el contenido matemático como objeto de enseñanza/aprendizaje y el uso que hace de los diferentes modos de representación es clave para aproximarnos a lo que necesita conocer un profesor para desarrollar su compleja labor.

Pero no queremos terminar esta presentación sin hacer mención a lo que nosotros hemos aprendido. Hemos visto como un profesor experto establece conexiones, crea relaciones, incorpora información de experiencias anteriores en un proceso dinámico, que forma parte de su desarrollo profesional. Y, sobre todo, hemos valorado su disponibilidad y esfuerzo por colaborar con nosotros, haciendo posible el desarrollo de este tipo e investigación.

REFERENCIAS

Escudero, I. & Sánchez, V.: 1999a, The relationship between professional knowledge and teaching practice: the case of similarity, en Zaslavsky (ed.) *Proceedings of the 23 conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education, Haifa, Israel*, vol. 2, 305-312.

Escudero, I. & Sánchez, V.: 1999b, Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la práctica: la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje, *Quadrante*, vol. 8, nº 1-2, 85-110.

Even, R. & Tirosh, D.: 1995, Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentation of the subject-matter, *Educational Studies in Mathematics* 29:1-20.

García, M.: 1997, *Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje,* GIEM-Kronos: Sevilla.

García, M. & Llinares, S.: 1999, Procesos interpretativos y conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Reflexiones desde la perspectiva de la enseñanza como diseño, *Quadrante*, vol. 8, nº 1-2, 61-84.

Grossman, P.L.: 1990, *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education,* New York: Teachers College Press.

Leinhardt, G., Putnan, R.T., Stein, M.K. & Baxter, J., 1991, Where subject knowledge matters, en J. Brophy (ed) *Advances in Research on Teaching*, vol. 2, JAI Press: London, 87-113.

Leinhardt, G. & Greeno, J.G.: 1986, The cognitive skill of teaching. *Journal of Educational Psychology*, 78(2), 75-95.

Lemonidis, C.: 1991, Analyse et realisation d'une experience d'enseignement de l'homothétie, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 11 (2.3), 295-324.

Llinares, S.: 1999, Intentando comprender la práctica del profesor de Matemáticas. En J.P Ponte y L. Serrazina (eds) *Educaçao Matematica em Portugal, Espanha e Italia*. SEM de SPCE: Lisboa, Portugal, 109-132.

Llinares, S.: 2000, Secondary school mathematics teacher's professional Knowledge: A case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 6(1), 41-62.

Llinares, S. y Sánchez, V.: (revisión), Four student teachers' pedagogical reasoning on functions.

McDiarmid, G.W., Ball, D.L. & Anderson, C.W.: 1989, Why Staying One Chapter Ahead Doesn't Really Work: Subject-Specific Pedagogy. En M.C.Reynolds (ed) *Knowledge Base for the Beginning Teacher,* Oxford: Pergamon Press, 193-206.

Shulman, L.: 1987, Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, vol. 57 (1), 1-22.

Wilson, S., Shulman, L. & Richert, A.: 1987, '150 different ways' of knowing: representations of knowledge in teaching. En J. Calderhead (ed*) Exploring teachers' thinking*, London: Casell, 104-124.

Comentario al Trabajo: Las Representaciones de los Profesores del Contenido Matemático de Victoria Sánchez

Luis Rico Romero
Universidad de Granada

El trabajo se estructura en cinco apartados y un resumen inicial:

1. Introducción.
Presenta diversos sentidos del término representación en los trabajos que se ocupan de profesores y representaciones.

2. Enmarcando el problema de investigación.
Resume el modelo teórico del razonamiento pedagógico y destaca el proceso de transformación del contenido como foco elegido para estudiar las representaciones.

3. Ejemplificación del uso de la noción de representación adoptada en investigaciones concretas.
Elige un ejemplo para mostrar la forma en que el profesor conoce la materia y cómo puede emplearse la noción de representación adoptada..
3.1 La comprensión del profesor de la semejanza.
3.2 La transformación del contenido matemático para la enseñanza.

Analiza las relaciones entre la forma de conocer el profesor la semejanza (su representación mental de la misma), y el proceso de transformación.

Se propone realizar la interpretación de los datos presentados dentro del marco teórico elegido. Resume las ideas y destaca el papel de las representaciones del profesor.

4. Cuestiones abiertas.

Revisa el objetivo general; hace un balance de logros alcanzados y muestra algunas cuestiones abiertas para el futuro.

Ideas que destacan en los apartados anteriores:

1. Introducción

Distingue tres sentidos para el término representación:

1º Herramientas que muestran los objetos matemáticos (Leinhardt); los profesores las utilizan y su elección da información sobre su conocimiento de la materia.

2º Representaciones metacognitivas de los profesores, utilizadas por algunos psicólogos sociales.

3º Representaciones mentales de los profesores, entendidas como las *formas de conocer que éstos tienen sobre un contenido* y que se muestran en el proceso de transformación de la materia que el profesor realiza para su trabajo en el aula.

La autora se va a centrar en esta tercera acepción, si bien va a utilizar también la primera a lo largo de su análisis, sin cuestionarla ni hacerla problemática.

Se destaca que la representación mental que un profesor tiene sobre un contenido influye sobre el aprendizaje que ese profesor considera adecuado y el modo en que estructura su enseñanza. Esto se muestra en la organización del contenido que presenta a sus alumnos.

2. Enmarcando el problema de investigación

Para situar el trabajo revisa el modelo de Shulman sobre ciclo de actividades involucradas en el razonamiento pedagógico del profesor. Señala que el foco elegido está en *la transformación del contenido* con el propósito de su enseñanza. Señala la fuerte relación existente entre la representación mental del contenido matemático que tiene el profesor, los conceptos que destaca y las elecciones que realiza.

Dos nociones importantes son las de comprensión y transformación.

Sobre *comprensión* considera aquellos *aspectos* a los que el profesor concede mayor importancia *para organizar el contenido* que presenta a sus alumnos y en los *usos* y *modos de representar el contenido*. No considera que las representaciones y el análisis conceptual del propio contenido sean también organizadores para el plan de trabajo en el aula.

Sobre *transformación* señala que comprende cuatro subprocesos, y que se va a ocupar sólo de los dos primeros: interpretación crítica y los diferentes modos de representación (herramientas).

En la revisión crítica parece apoyar que los documentos sobre los que basar este subproceso han de ser los textos y materiales para el aula, ya elaborados con anterioridad, y que los únicos sistemas de representación que se deben considerar son los ya presentes en libros. Resulta un corsé restrictivo para la investigación y para el propio profesor.

3. Ejemplificación del uso de la noción de representación adoptada en investigaciones concretas

De nuevo reitera la noción de representación mental del profesor como la forma de conocer que tiene un profesor un determinado contenido matemático.

Igualmente postula la influencia que tiene en la toma de decisiones del profesor en el proceso de transformación del contenido considerado.

A continuación nos explica que va a tomar un ejemplo con el que identificar y caracterizar las decisiones tomadas por un profesor.

Finalmente esas decisiones, junto con el discurso justificativo que las acompaña, muestran las representaciones mentales del profesor en estudio.

Esta petición de principio: representaciones mentales son las formas de conocer del profesor, que influyen en las decisiones; estudiemos y analicemos las decisiones junto con los argumentos que las acompañan y tendremos las representaciones mentales, pone en duda si las representaciones mentales son sólo los argumentos y justificaciones o bien son éstos junto con las decisiones.

Decir que las representaciones mentales son *algunas características de la forma de conocer* y no decir cuantas y cuáles, ni siquiera aproximadamente, tampoco ayuda a entender el concepto. Las representaciones mentales de los profesores quedan como algo escasamente concreto y cuya detección no tiene sistemática establecida.

Así, por ejemplo, en el apartado 3.1 se señala que la conexión numérico-gráfica es una característica importante de la representación mental, pero no se indica cómo dimensionar esta característica en la que parece que no hay grados: ¿cualquier mención a la conexión numérico- gráfica es igualmente válida?, ¿expresa la misma representación mental?

Parece claro que los subprocesos considerados organizan la información recogida, una vez emitida y a efectos de sistematizarla y estudiarla. Sin embargo, no parece considerar de interés el disponer de una organización previa que permita al profesor estructurar sus conocimientos. El investigador parece no tener seguridad para dar orientaciones normativas a los profesores.

En el apartado 3.2 se enuncia que *el plan para la unidad didáctica (...) y las razones que el profesor proporciona muestran su forma de conocer el contenido, junto con otras concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje mas generales.* Pero ¿podría ser de otro modo? ¿cómo podría no mostrarlo?

El epígrafe *interpretación crítica* presenta una planificación y secuenciación de una unidad didáctica en toda regla, basada en un análisis conceptual previo junto con otros organizadores, pero no se aprecia la crítica de materiales curriculares postulada como subproceso.

El epígrafe *repertorio representacional* no concluye el balance: no considera reglas sintácticas al interior de cada sistema de representación; tampoco considera las conversiones entre sistemas. Sólo se presenta una descripción general de algunas de las tareas que se abordan para cada sistema.

En cuanto a las relaciones entre la forma de conocer el profesor la semejanza (su representación mental de la misma), y el proceso de transformación.

Se resumen e interpretan las informaciones recogidas en el apartado anterior, destacando los aspectos más relevantes puestos en juego por el profesor para el diseño de la unidad didáctica. Entre ellas destacan las relaciones entre los sistemas numérico y gráfico: señala las tareas de traslación, pero no considera ni analiza que la traslación se hace siempre desde lo gráfico a lo numérico; lo gráfico resulta un apoyo para lo numérico-estructural.

Qué cosa pueda ser la representación mental del profesor que se estudia queda reducida a un listado de los usos y organizaciones mostrados que, por supuesto, no son internos.

4. Cuestiones abiertas

Vuelve a reiterar el objetivo del trabajo.

Entiende que ha mostrado el papel que juega la representación mental interna en el proceso y para ello enumera todas las evidencias externas recogidas.

Señala algunos puntos de interés para estudios futuros, entre ellos indagar sobre causas que condicionan determinadas decisiones, es decir, seguir buscando las representaciones mentales del profesor.

Sesión de Proyectos

Proyecto I

Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de los conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y estudiantes de Bachillerato LOGSE y primer curso universitario.

(I.P. Dr. A. Contreras)

Coordinador

Dr. Salvador Llinares Ciscar

Universidad de Sevilla

Ponente

Dr. Ángel Contreras de la Fuente

Universidad de Jaén

Replicante

Dra. Lurdes Serrazina

Universidad de Lisboa

La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión[1]

Ángel Contreras de la Fuente
Universidad de Jaén

RESUMEN

La enseñanza del Análisis Matemático en 1º y 2º de Bachillerato y primer año de Universidad, presenta unos problemas, asociados a los fenómenos didácticos inherentes al estudio de las Matemáticas, que es necesario tipificar a partir de la modelización del conocimiento matemático y del proceso de enseñanza escolar. En este Proyecto se estudian los conceptos elementales del Análisis Matemático –límite, continuidad, derivada e integral- desde la perspectiva de los obstáculos epistemológicos y de los actos de comprensión (Sierpinska, 1997), en cuanto al saber escolar (detectado en los manuales), el saber enseñado (que figura en los apuntes de los profesores) y el saber del alumno (identificado por medio de sus respuestas a un cuestionario) tratando de extraer datos que faciliten el uso de estrategias de enseñanza-aprendizaje de estas nociones en situaciones de enseñanza adecuadas.

1. INTRODUCCIÓN

Para poder responder al estudio de los problemas didácticos relacionados con la enseñanza del Análisis Matemático en el nivel elemental, identificado en los dos cursos del Bachillerato y en el primer curso de Universidad, se constitu-

1. En torno al Proyecto de Investigación: "Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático -límite, continuidad, derivada e integral- en manuales y en estudiantes del Bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario", financiado por el C.I.D.E.

yó, a principios de 1997, el grupo internivel GEAMJA (grupo de enseñanza del Análisis Matemático de Jaén)[2]. El grupo solicitó en la convocatoria del C.I.D.E. (Ministerio de Educación y Cultura) de 1997[3], y obtuvo, el *Proyecto de Investigación: "Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes del bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario"*.[4]

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Uno de los fenómenos didácticos que considero fundamental dentro de la enseñanza del Análisis Matemático es el de la "algebrización del cálculo diferencial escolar", ya señalado por Artigue (citado en Gascón, 1998) que se manifiesta en un enfoque algebraico y reduccionista del cálculo y se basa en las operaciones algebraicas con límites, derivadas e integrales, pero que trata de una forma simplista las ideas y técnicas específicas del Análisis, como son la idea de razón de cambio instantáneo, o el estudio de los resultados de esas razones de cambio.

De este fenómeno didáctico, la algebrización del cálculo diferencial escolar, emerge un problema didáctico-matemático, cuyo estudio implica abordar todo un complejo entramado de problemas de investigación que suponen un verdadero programa de investigación.

La preocupación por la actividad matemática que se realiza en las clases y, por tanto, la focalización en la modelización de las tareas y técnicas -enfoque antropológico (Gascón y Fonseca, 2000)- o en los significados personales emergentes de esas tareas -teoría del significado (Godino y Batanero, 1999 y Font, 1999)- tiende a considerar la propia tarea como "primitiva", que se acepta de modo acrítico en las teorías. Sin embargo, pensamos que las tareas que se plantean en las clases no son "inocentes". Así, cuando el profesor "explica" una determinada noción matemática y, por desgracia, no aborda o lo hace de forma superficial los problemas característicos del Análisis, deslizándose hacia posturas algorítmicas más fáciles de gestionar y evaluar -en una verdadera ruptura del contrato didáctico (tipificado ya de forma clásica por lo que Brousseau denomina "efecto Topaze")-, no lo hace por falta de responsabilidad o por comodidad, sino porque se enfrenta de forma fatalista a unos conceptos que, por su natura-

2. La composición del grupo es la siguiente: Responsable del grupo: Ángel Contreras de la Fuente. Didáctica de la Matemática. Universidad de Jaén. Colaboradores: - Carmen Sánchez Gómez. Matemática Aplicada. Universidad de Jaén. - Manuela Ortega Carpio. Matemática Aplicada. Universidad de Jaén. - Lorenzo Luque Cañada. Profesor de Enseñanza Secundaria. I.E.S. "Pablo de Olavide". La Carolina (Jaén). - Lourdes Ordóñez Cañada. Profesora de Enseñanza Secundaria. I.E.S. "Auringis". Jaén.

3. Convocatoria correspondiente a la Orden de 23 de septiembre de 1997, (B.O.E. núm. 243 del 10-10-97).

4. Además, dos de los miembros, la profesora Sánchez y quien suscribe, son miembros del Proyecto PB97-0851 del M.E.C: "Fenómenos didácticos ligados a la adquisición de conceptos matemáticos fundamentales en Educación Secundaria y Universidad."

leza, son problemáticos en sí mismos. Es decir, se encuentra ante diversos obstáculos epistemológicos que, junto a los obstáculos propios del desarrollo de la clase (didácticos), han de ser superados, por medio de los actos de comprensión, por los estudiantes, si se busca que éstos vayan madurando los problemas específicos y más significativos del Análisis Matemático.

En el proyecto de investigación aludido anteriormente, se estudian los conceptos de: límite -Sierpinska (1990), Sánchez (1997), Sánchez y Contreras (1998), Contreras y col. (1999b) y Blázquez (2000)-, continuidad -El Bouazzoui (1988), Campillo (1999) y Contreras y col. (1999a)-, derivada - Azcárate (1990), Castela (1995), Cajaraville (1996), Font (1999) y Contreras y col. (2000a) e integral –Schneider (1988), Wenzelburger (1989), Turégano (1993) y Bessot y col. (1999).

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Obstáculos epistemológicos

Se considera que la noción de obstáculo epistemológico, idea central de esta investigación, es suficientemente conocida por la comunidad de investigadores de Didáctica de las Matemáticas, por lo que no es necesario dar una definición del mismo. Igual ocurre con el término acto de compresión, ya clásico sobre todo en los trabajos basados en la teoría de Sierpinska. Por tanto, se tratará de fundamentar la utilización de estos conceptos como medio para abordar una investigación de los objetos del Análisis Matemático ya especificados.

El desarrollo del conocimiento no es acumulativo, es decir, cuando se pasa de un nivel de comprensión a otro se da simultáneamente una integración y una reorganización del conocimiento. Me parece pertinente la idea de Bachelard (citado en Sierpinska, 1997) cuando afirma que se conoce *contra* un conocimiento anterior, reelaborando conocimientos que no funcionan ante determinados problemas, superando lo que es un obstáculo al conocimiento. En este sentido Sierpinska señala: “Una nueva comprensión no es más que parte construida sobre las maneras anteriores de comprender”.

La filosofía de los obstáculos epistemológicos constituye una barrera a las ideas positivistas que postulan que el conocimiento científico se puede construir apoyándose únicamente en la observación y en la lógica, fuera de toda consideración metafísica. En relación con esto, Sierpinska (1997) puntualiza: “La comprensión científica no puede hacer abstracción de la metafísica, lo que supone que siempre existirán obstáculos epistemológicos” (p. 127).

Como han señalado algunos investigadores (Radford, 1997 y Artigue, 1998), la cultura es un factor de gran influencia en la noción de obstáculo epistemológico. Es decir, el desarrollo del conocimiento no tiene lugar únicamente dentro de la estructura de la evolución natural del sujeto, sino también, dentro de las estructuras socioculturales del desarrollo.

Cuando se tienen en cuenta los factores socioculturales, la noción de obstáculo epistemológico adquiere un giro importante. Es decir, como el conocimiento es también una producción cultural ineludiblemente relacionada con el medio, los factores culturales influyen en los obstáculos epistemológicos. Como señala Radford (1997): "Las Matemáticas son, básicamente, manifestaciones semióticas de ciertos elementos culturales que sus miembros desarrollan a través de experiencias compartidas y desde donde se forman el significado de los productos" (p. 30). Habrá, por tanto, que considerar que los obstáculos epistemológicos están ligados tanto al desarrollo personal como al medio cultural.

Una de las raíces de los obstáculos epistemológicos es de origen psicogenético, dado que el obstáculo epistemológico es una concepción que forma parte de un sistema de nociones, de modos de pensar, de creencias, que no pueden ser modificados ni eliminados sin que su incidencia afecte al sistema completo. Ahora bien, en la clase de Matemáticas, cuando el profesor muestra a sus alumnos cómo resolver problemas concretos, dirige su atención sobre las informaciones pertinentes desde el punto de vista matemático, dejando al margen las que no lo son, utiliza determinados recursos didácticos, … Es decir, trasmite una cultura. Ésta es, por tanto, una forma de comunicación, un comportamiento adquirido y común y un esquema de pensamiento, en el que la enseñanza y el aprendizaje juegan un papel crucial. Se pueden ver las Matemáticas como un sistema cultural en evolución y desarrollo.

Sierpinska (1997), basándose en la teoría de la cultura de Hall, considera tres niveles en la cultura matemática: "se pueden distinguir tres modos de pensamiento matemático, tres maneras de trasmitir este pensamiento, tres tipos de conocimiento, tres índoles de relaciones emocionales: el formal, el informal y el técnico" (p. 160). En el nivel formal la comprensión se apoya en las creencias, mientras que el informal se basa en los esquemas de acción y de pensamiento; por último, el nivel técnico hace referencia a un saber explícito, analítico y que se exige lógicamente coherente y justificado en el plano racional.

En una cultura matemática dada el nivel informal juega un papel crucial, positivo y negativo a la vez. Las formas implícitas de abordar y resolver los problemas aparecen aquí y, con ellas, el pensamiento matemático creativo. Sin embargo, en la medida en que este conocimiento y esta comprensión no son plenamente conscientes y cuestionados y están ligados a experiencias reales y a situaciones concretas, son susceptibles de conducir a un callejón sin salida cuando se aplican a una situación nueva. Se puede utilizar inconscientemente el mismo esquema de pensamiento o de acción y observar que no se dan los buenos resultados que se esperaban. Es decir, se puede estar frente a un "obstáculo", cuya superación supondrá cambiar nuestra manera de comprender. El nivel informal constituye, por tanto, la base de los obstáculos epistemológicos.

Cuando se estudia un determinado concepto a lo largo de su evolución epistemológica (ver por ejemplo, Sánchez y Contreras, 1998, para el caso del límite de una función), aparecen concepciones que no son capaces de dar respuesta a nuevos tipos de problemas, pero que están muy ancladas en la cultura del momento y sí responden a otro tipo de problemas. Se hablará en estos casos de la idea de obstáculo epistemológico. Considero, por tanto, que se trata de obstáculos epistemológicos que surgen del nivel técnico de una etapa histórica concreta, como concepciones válidas para determinados campos de problemas, pero que se relegan al nivel informal en la época posterior, en la que emerge una nueva concepción (de esta manera creemos que debería quedar zanjada la polémica planteada por Radford en el trabajo citado). Como apunta Gascón (citado, en Cid (2000)), un obstáculo epistemológico debe buscarse en los orígenes de una bifurcación, entendiendo por tal un cambio en la naturaleza del trabajo matemático, tanto en lo referente a las técnicas como al campo de problemas que aborda.

Por otra parte, como señala Cid (2000), "la determinación de obstáculos en la historia de las Matemáticas es interesante desde el punto de vista didáctico si se constata su supervivencia en la enseñanza actual y, en particular, en los alumnos actuales. Un obstáculo epistemológico es, ante todo, una concepción detectable en un número significativo de alumnos que puede ser puesta en relación con ciertas nociones históricas" (p. 9). Es decir, el término obstáculo tiene un aspecto cognitivo ineludible que está ligado a los niveles formales e informales del conocimiento matemático.

3.2. Actos de comprensión

Sierpinska, basándose en las ideas de Vygotski sobre la formación de los conceptos espontáneos y científicos, al formular la hipótesis de que para que el sujeto comprenda ha de enfrentársele -mediante situaciones de enseñanza adecuadas- a los obstáculos epistemológicos inherentes a un determinado saber, de tal forma que se facilite la emergencia, por parte del sujeto, de los actos de comprensión necesarios para la superación de los obstáculos, propone cuatro operaciones mentales fundamentales que intervienen en la comprensión:

- La identificación, en el sentido de descubrimiento o de reconocimiento. Si se señala que se ha identificado un objeto de comprensión, quiere decir que se ha extraído del campo de la inconsciencia, donde se encontraba como oculto; además, también supone reconocer algo que se tiene intención de comprender.
- La discriminación, que consiste en la identificación de dos objetos como distintos. Se consideran varios grados en la discriminación y en identificación; desde la simple percepción, hasta la comparación de dos ideas generales bajo la perspectiva de las relaciones abstractas - pasando por la comparación por medio de circunstancias sensibles.
- La generalización, operación intelectual por la que se reconoce que una situación dada es un caso particular de otra situación - término que se utiliza en sentido amplio, es decir, para designar una clase de objetos (materiales a mentales) o de fenómenos -.
- La síntesis, búsqueda de un principio unificador, o de una semejanza entre varias generalizaciones que permite unificarlas como un todo.

Hay varias condiciones necesarias para que se dé un acto de compresión. Unas son de índole psicológico, como la atención y la intención de comprender, otras de carácter social, ligadas obviamente a las anteriores, como son el diseño de actividades significativas que logren captar la atención del alumno y la comunicación, como medio para poder debatir y validar las propuestas de solución a dichas actividades.

3.3. Los objetos del Análisis Matemático

Que el obstáculo epistemológico está presente en numerosos conceptos del Análisis Matemático se pone en evidencia recurriendo a algunos ejemplos. Así, Schneider (1988) considera como obstáculo epistemológico lo que denomina el "obstáculo de la heterogeneidad de las dimensiones" (pensemos simplemente lo que supone para un estudiante que se le diga que el área -magnitud bidimensional- de una región encerrada por la gráfica que representa a la velocidad es el espacio recorrido por el móvil, que es unidimensional). Sierpinska cita el propio teorema de Bolzano como fuente del obstáculo, relacionado con la continuidad, que considera a una función continua como aquella función cuya gráfica es conexa.

En El Bouazzoui (1988), un trabajo ya clásico, aparece un análisis muy completo sobre obstáculos y concepciones del concepto de continuidad. Basados en Cornu (1983) y Sierpinska (1985, 87, 90), Sánchez (1997) y Sánchez y Contreras (1998) pusieron de manifiesto la existencia de diversos obstáculos epistemológicos y actos de comprensión asociados a la noción de límite de una función en un punto. Asimismo, en Ruiz (1994) hay un detallado y excelente estudio sobre concepciones y obstáculos relativos al concepto de función.

Por otra parte, la enseñanza del Análisis Matemático en los niveles preuniversitario (de 1º y 2º de Bachillerato) y primer año de Universidad, sigue actualmente un programa que, aunque se vertebra en torno a la noción de límite, fluctúa entre los conceptos de continuidad, límite, derivada e integral. Como señala Cantoral (2000): "la visión más extendida, la más dominante, entre los cursos de Análisis Matemático consiste en asumir al análisis escolar como un aparato simbólico que opera sobre variables, que se ocupa de su optimización, de sus derivadas e integrales, así como de resolver problemas que involucren tasas de crecimiento, cálculos de longitud de curvas, áreas y volúmenes" (p. 2).

En el Proyecto se estudian los conceptos de límite, continuidad y derivada en los niveles anteriormente aludidos, desde la óptica de los obstáculos epistemológicos y actos de comprensión. Sin embargo, en futuros desarrollos se piensa ampliar y orientar estas cuestiones hacia ideas que aborden aspectos relacionados con la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber.

4. DISEÑO Y METODOLOGÍA

4.1. Hipótesis

La experiencia de tres de los miembros participantes en este proyecto como profesores de Enseñanza Media y Universidad y como Coordinadores de Matemáticas I de COU y Ponentes de Matemáticas II del Bachillerato-LOGSE en los últimos 4 cursos (continuando en la actualidad uno de ellos), las diversas investigaciones efectuadas sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje relativos al concepto de límite, junto a la experiencia de los restantes miembros como profesores en enseñanza secundaria, nos permite formular las siguientes hipótesis de trabajo:

- Con referencia a las situaciones de enseñanza donde aparecen los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral, los libros de texto y los estudiantes muestran unas concepciones que pueden, en general, identificarse dentro de las que el estudio histórico determina sobre la noción.
- En el tratamiento didáctico que se da a los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral, en los textos dirigidos al Bachillerato-LOGSE y al primer curso de Universidad, no aparece de modo sistemático una secuenciación adecuada de los pasos necesarios para provocar los actos de comprensión en el estudiante que le permitan superar los obstáculos inherentes al concepto y al proceso de transposición didáctica.
- Los estudiantes del Bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario no muestran, en general, una evolución en la comprensión de los conceptos objeto de estudio, en cuanto a la ampliación de sus concepciones y la superación de obstáculos, una vez recibida la instrucción.
- Las respuestas erróneas de los estudiantes no ocurren al azar, sino que están asociadas a los distintos obstáculos inherentes a los conceptos y al proceso de transposición didáctica.

4.2. Objetivos

Para dar respuesta a las hipótesis formuladas, se propone un ***doble objetivo general:***

- La identificación de los factores y fenómenos didácticos que influyen en una adecuada comprensión, por parte de los estudiantes, de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático: límite, continuidad, derivada e integral.
- El logro de una armonización de la enseñanza, por medio del uso de estrategias de enseñanza-aprendizaje en situaciones didácticas adecuadas, en los cursos que enlazan dos niveles educativos (Bachillerato-LOGSE y Universidad).

Para alcanzar este doble objetivo general se requieren los siguientes objetivos específicos:

Objetivo específico 1: Análisis epistemológico de la génesis y evolución histórica de las distintas nociones objeto de estudio.

Objetivo específico 2: Análisis comparativo de libros de texto actuales, según autor y nivel de enseñanza, respecto a los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral.

Objetivo específico 3: Estudio cualitativo-cuantitativo de la evolución de concepciones y obstáculos de los estudiantes de ambos niveles por medio de cuestionarios aplicados antes y después de la enseñanza de los conceptos.

Objetivo específico 4: Realización de un diagnóstico, a la vista de los resultados obtenidos, sobre los contenidos y el tipo de enseñanza a realizar en ambos niveles educativos con objeto de lograr su armonización.

4.3. Población, muestra y procedimiento de muestreo

El universo donde se realiza la investigación lo constituyen, por una parte, los libros de texto más utilizados en la enseñanza de los conceptos matemáticos, antes señalados, en el Bachillerato-LOGSE y primer curso de Universidad y, por otra, los estudiantes de los cursos que enlazan ambos niveles educativos: 2º de Bachillerato-LOGSE y primer curso de enseñanza universitaria científico-tecnológica.

De acuerdo con las características de este proyecto, la muestra y el tamaño de la misma considerados en cada caso es la siguiente:

- Estudiantes de 2º curso de Bachillerato-LOGSE de los I.E.S. "Martín Halaja" y "Pablo de Olavide" de La Carolina (Jaén): 30 alumnos aproximadamente.
- Estudiantes de 1º de I.T. en Informática de Gestión: 30 alumnos aproximadamente.
- Respecto a libros de texto, se analizan aproximadamente 10 libros de texto y se efectúa su selección atendiendo a diversos aspectos: relevancia de los autores, que sean conocidos a nivel andaluz y estatal o que se recomienden o utilicen por los profesores y estudiantes de los distintos niveles educativos participantes en el proyecto. Los manuales que se analizan corresponden al período de tiempo 1995-2000.

4.4. Metodología empleada

Una vez realizado el diseño de la investigación, se sigue la línea propuesta por Fox (1981) en cuanto a las etapas a considerar en el proceso de la investigación (diseño, recogida de datos, análisis de datos y resumen de resultados); en el enfoque metodológico se ha tenido en cuenta lo indicado por Huberman y Miles (1994) y, además, las interacciones de esas etapas con los componentes propios del análisis de datos (reducción-clasificación de datos y exposición de éstos).

Al tratarse de una investigación fundamentalmente de tipo cualitativo interpretativo, abarca en su conjunto rasgos de los paradigmas cualitativos-interpretativos, Goetz y Lecompte (1988); no obstante, como estos investigadores afirman, una investigación nunca es totalmente cualitativa o cuantitativa y, por tanto, se consideran también aspectos cuantitativo-experimentales para los casos de los cuestionarios.

Como instrumentos de recogida de datos, para el estudio de la evolución de las concepciones de los alumnos, se utiliza un cuestionario escrito de ítems con preguntas abiertas y cerradas sobre las concepciones y obstáculos relativos a los conceptos objeto de estudio. En aquellos casos precisos se realizan entrevistas a los alumnos que permiten profundizar en sus concepciones.

4.5. Variables

Se han clasificado en la forma siguiente:

En los libros de texto analizados

1) Variables dependientes: - Número y tipo de obstáculos presentes. - Número y tipo de obstáculos superables. - Número y tipo de obstáculos no superables. - Concepciones históricas presentes. - Definición. - Conceptos asociados. - Ejemplos y ejercicios que se proponen. - Estatuto de la noción. - Introducción.
2) Variables independientes: - Autor. - Nivel de enseñanza.
3) Variables concomitantes: - Conceptos que se investigan. - Libros de texto elegidos. - Los periodos globales de tiempo elegidos. - Obstáculos epistemológicos y didácticos. - Concepciones históricas y asociadas.

En los alumnos participantes

1) Variables dependientes: - Número y tipo de obstáculos presentes. - Número y tipo de obstáculos superados. - Número y tipo de obstáculos no superados. - Número y tipo de concepciones erróneas. - Número y tipo de concepciones correctas. - Contextos utilizados en los ejemplos que proponen.
2) Variables independientes: - Grupo. - Instante en el que se efectúa la evaluación (pretest y postest).
3) Variables concomitantes: - Conceptos tratados. - Nivel académico: Diplomatura Técnica, 2º curso de Bachillerato-LOGSE. - Nivel de conocimiento matemático previo. - Procedencia según estudios realizados (COU, Bachillerato-LOGSE, otros) - Sexo. - Obstáculos epistemológicos y didácticos. - Concepciones históricas y asociadas.

4.6. Técnicas de análisis

El análisis de libros de texto se efectúa desde un punto de vista descriptivo, realizándose un estudio comparativo que considera las interacciones entre autor y nivel (igual autor y distinto nivel de enseñanza, igual nivel de enseñanza y distinto autor) teniendo en cuenta los trabajos de Schubring, (1985,87), Weber (1986), Sánchez y Contreras (1995b, 1996a,b, 1997) y Contreras y Sánchez (1998).

Para el análisis de concepciones y obstáculos de los alumnos se elaboró un cuestionario piloto en el que se estudiaron aquellos aspectos que permitieron el diseño del cuestionario definitivo.

El análisis de los datos que se obtienen del cuestionario definitivo a aplicar a los estudiantes de ambos niveles educativos tiene aspectos cualitativos y cuantitativos. Para la reducción de los datos, que no está separada del análisis ya que forma parte de él, se consideran las respuestas dadas por los estudiantes, clasificándolas en categorías, según la naturaleza de las mismas y de los objetivos que se pretenda lograr con cada ítem teniendo en cuenta concepciones y obstáculos. Se codifican los datos y se aplican los paquetes estadísticos BMDP y SPSS.

4.7. Fases y duración

Teniendo en cuenta que este Proyecto se presentó en el mes de diciembre de 1997 y se resolvió a los 9 meses, y dado que los resultados se han de entregar en un plazo de dos años, las fases a realizar para lograr los objetivos antes indicados se han distribuido entre los cursos 1998-99 y 1999-2000 de acuerdo al siguiente esquema:

Curso 1998-99

Fase 1. Profundización en el estudio histórico de los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral, a fin de clarificar las concepciones y obstáculos, analizando éstos bajo la perspectiva de que su superación supone un avance en la comprensión de los conceptos.

Fase 2. Dado que tanto las concepciones como los obstáculos se utilizan posteriormente en otros objetivos, en esta fase será preciso categorizar tanto unos como otros para poder analizar los libros de texto y efectuar la clasificación de las respuestas de los alumnos.

Fase 3. Realización del análisis de los libros de texto.

Fase 4. Elaboración de un cuestionario piloto y de otro definitivo, a partir de los datos obtenidos en las fases anteriores, para aplicar antes y después de la instrucción a los estudiantes participantes es la investigación con objeto de analizar la evolución de sus concepciones y obstáculos.

Curso 1999-2000

Fase 5. Aplicación del cuestionario definitivo, antes y después de la instrucción, a los estudiantes participantes es la investigación y análisis de los resultados.

Fase 6. Extracción de conclusiones, a partir del análisis realizado, aplicadas a la enseñanza de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático.

5. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Como en todo trabajo de investigación, a lo largo de la evolución del mismo aparecen factores y condicionantes que aconsejan efectuar una reorientación de su desarrollo. En el caso de este Proyecto, han sido varios los factores que han influido en su elaboración definitiva, aunque de todos esos factores ha sido la propia formación, continuada sin duda, de los investigadores el que más puede haber condicionado algunos de los pasos dados en este sentido.

La investigación se ha desarrollado a lo largo de tres cursos, de 1997-98 a 1999-2000, habiéndose estudiado los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral. Aunque se eligieron estas nociones por ser las básicas del Análisis Matemático, es obvio que un análisis profundo –como así lo requiere todo trabajo serio de indagación- de esos conceptos supone un planteamiento a largo plazo que, en tres cursos, ha sido imposible lograr. En consecuencia, *una limitación en el desarrollo del Proyecto* es que si bien se analizan en toda su extensión el límite y la continuidad de una función, en la derivada se realizan determinados planteamientos parciales y, por último, únicamente se realizan incursiones en el conocimiento de la integral.

Otra limitación ha sido el trabajo con los grupos de estudiantes a los que se aplicó el cuestionario. Si bien se contaba con 30 alumnos en cada uno de los dos grupos analizados, únicamente hemos podido contar con 18 en Bachillerato y 15 en Universidad. Las razones de ello es que como sólo ese número de sujetos cumplían la condición de haber realizado pretest y postet a la vez, y obviamente se han aplicado escrupulosamente las condiciones metodológicas de la investigación, se dan los resultados obtenidos con ese número de individuos, aún a costa de la cuestión de la generalidad de los resultados. Además, como se trata de un estudio cualitativo consideramos que son las aportaciones teóricas que se efectúan en el Proyecto las que han de servir fundamentalmente a los futuros investigadores.

Hemos de llamar la atención sobre un fenómeno didáctico cada vez más frecuente, lo que hemos denominado "fracaso escolar residual", consistente en que de los 30 alumnos que pueden formar un grupo de Matemáticas, únicamente unos cuantos estudiantes son los que verdaderamente siguen el curso hasta el final, lo cual limita "per se" toda investigación en el campo de la Didáctica de las Matemáticas.

Dado que se está trabajando en el seno de un Grupo de Investigación (GEAMJA), habrá una continuidad natural en el desarrollo de la investigación, de tal forma que la idea es completar en el futuro el campo conceptual de los procesos infinitesimales en cuanto a su enseñanza-aprendizaje.

6. CONCLUSIONES

Si bien las conclusiones se refieren, obviamente, a la constatación de las hipótesis formuladas –lo cual aparece en el Proyecto de Investigación (Contreras y col., 2000b)- se considera que son las conclusiones respecto a las nociones estudiadas lo que interesa hacer explícito en este apartado.

6.1. Conclusiones respecto a la enseñanza del límite de una función

Después de haber analizado los resultados de la investigación y, sobre todo, las hipótesis se llega a la conclusión de que, en general, el alumno no ha comprendido el concepto de límite. Puede que sepa manipularlo algorítmicamente e incluso sea capaz de salir airoso de algunos de los problemas que le plantean los manuales - ya que en ellos se suelen plantear normalmente cuestiones de índole algebraico -, pero son numerosos los obstáculos que, antes y después de la enseñanza, manifiestan estos estudiantes.

Es decir, la idea motriz aportada por Sierpinska (1991) de "enfrentar a los alumnos a los obstáculos inherentes al concepto mediante situaciones que le faciliten la emergencia de actos de comprensión" no se ve reflejada - de modo sistemático - en los manuales ni en los apuntes del profesor, que seguramente no es exactamente lo que el profesor hace y dice en clase - como así se ha constatado cuando el profesor ha analizado sus propios apuntes - pero, al menos, es lo que un buen alumno transcribe y, por tanto, lo que incide directamente sobre lo que Chevallard denomina “el saber del alumno”.

El límite, a pesar de que pueda ser presentado con un estatus de objeto de conocimiento, es realmente usado tanto por los alumnos como por los manuales e incluso por el profesor como una herramienta para otros objetos: continuidad y derivabilidad principalmente.

La concepción que normalmente presentan los alumnos, tras su enseñanza, es la numérica dinámica (Sánchez, 1997), pero es significativo el hecho de que no sean capaces de responder satisfactoriamente a situaciones planteadas con tablas numéricas. Parece más bien que la idea de aproximación que tienen es de índole geométrico pero, sin embargo, no son capaces de relacionar con fluidez y soltura expresiones de límites con sus correspondientes traducciones gráficas aunque seguramente al contrario les resultaría más asequible.

6.2. Conclusiones respecto a la enseñanza de la continuidad de una función

La idea de continuidad de una función es un concepto, a priori, más asequible para el alumno que la de límite de una función. Sin embargo, tras la investigación realizada y los resultados obtenidos, se observa como la gran mayoría de los estudiantes es capaz de estudiar, de manera más o menos satisfactoria, la continuidad de una función definida a trozos mediante el empleo de la concepción de Cauchy (El Bouazzoui, 1988), pero esos mismos estudiantes han sido incapaces de definir mediante dicha concepción el concepto de función continua en un punto, dándose numerosos casos en los que se presentan incluso concepciones erróneas (de Euler y la denominada CH) a lo largo de la prueba.

Todo esto no hace sino reafirmar el problema central de la investigación de que en la enseñanza de los conceptos tratados se produce un deslizamiento didáctico hacia la algebrización del concepto. El alumno es capaz de aplicar el método para estudiar la continuidad de una función en un punto, pero podría ser que no sólo no estuviera entendiendo el concepto de continuidad sino que ni siquiera supiera lo que es una función definida a trozos.

6.3. Conclusiones respecto a la enseñanza de la derivada de una función

El concepto de derivada de una función en un punto es, según nuestra experiencia y los resultados de la investigación, el más desconocido por los alumnos tras su enseñanza. La concepción que adquieren, a lo sumo, es la geométrica denominada CDG (saben encontrar puntos de no derivabilidad en la gráfica de una función siempre que sean angulosos o no continuos) o de la pendiente CDP (identifican la derivada de la función en un punto con la pendiente de la recta tangente) aunque en esta última concepción se vuelve a producir un deslizamiento hacia la algebrización del concepto; el alumno es capaz de resolver problemas más o menos complicados sobre el cálculo de ecuaciones de rectas tangentes mediante técnicas aprendidas pero es difícil que entienda realmente lo que construye y sea capaz de asociar la idea de variación con la de pendiente de la recta tangente.

La algebrización del concepto es propiciada en Bachillerato por el hecho de que no sea introducido normalmente - en la asignatura de matemáticas - hasta el primer trimestre de 2º, mientras que en la asignatura de física ya se habrá introducido en 1º como una herramienta para resolver problemas cinemáticos.

Otro problema que se presenta en la enseñanza del concepto de derivada es la poca atención que se presta a la concepción de razón de cambio (CDRC), ya que a pesar de que la mayoría de los manuales introducen el concepto mediante la definición y algunos ejemplos de la tasa de variación media, finalmente este tipo de ejercicio es marginado en los de recapitulación final. Además, como en los exámenes -no sólo del profesor sino también en los de las instituciones (se puede observar la ausencia total de este tipo de ejercicios en los exámenes de selectividad)- no aparecen situaciones acordes a esta concepción, su marginación es casi total.

Finalmente, y no por ello menos importante, la dificultad de la comprensión del concepto de derivada de una función en un punto puede deberse también a la "trasparencia" aparente del concepto de recta tangente. Hemos podido constatar las concepciones erróneas, no solo previas sino incluso posteriores a la enseñanza de la derivada, que los alumnos poseen sobre la recta tangente a una curva. Ningún manual hace un estudio sobre las tangentes. Resulta paradójico que el problema fundamental que condujo históricamente al concepto de derivada no sea abordado por los manuales, y es más, sea dado por sabido en el estudiante, es decir, como noción transparente para el estudiante.

REFERENCIAS

Artigue, M.: 1998, 'L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, nº 2, pp. 231-262.

Azcárate, C.: 1990, *La velocidad: introducción al concepto de derivada,* Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

Bessot, D. y col.: 1999, *Aux origines du calcul infinitésimal. Comprendre les mathématiques par les textes historiques,* IREM – HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, Ellipses.

Blázquez, M.S.: 2000, *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales,* Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid.

Cajaraville, J.A.: 1996, *Evaluación del significado del Cálculo Diferencial para estudiantes preuniversitarios. Su evolución como consecuencia de una Ingeniería Didáctica alternativa*, Tesis Doctoral, Universidad de Santiago.

Campillo, P.: 1999, *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de Van Hiele,* Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia.

Cantoral, R.: 2000, *Pensamiento matemático avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis,* Documento interno del CINVESTAV, México.

Castela, C.: 1995, 'Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 15, nº 1, pp. 7-47.

Cid, E.: 2000, Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos, *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Cangas de Marazzo (Pontevedra).

Contreras, A. y Sánchez, C.: 1998, Estudio de manuales universitarios de la segunda mitad del siglo XX sobre el concepto de límite de una función, en cuanto a los ejemplos, *V Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias,* Jaca.

Contreras, A. y col.: 1999a, La enseñanza de la continuidad de una función en el primer curso de Universidad. Una metodología de análisis de análisis de manuales en cuanto a concepciones y obstáculos. Aplicación a un manual, *IX JAEM*, Lugo.

Contreras, A. y col.: 1999b, Una metodología de análisis, en cuanto a los ejemplos que aparecen en los libros de texto, del concepto de límite de una función. Estudio de un manual de primer curso de Universidad, *IX JAEM*, Lugo.

Contreras, A. y col.: 2000a, Concepciones y obstáculos en la noción de derivada. Análisis de un manual de 2º de Bachillerato-LOGSE, *IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, San Fernando (Cádiz).

Contreras, A. y cols.: 2000b, *Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático -límite, continuidad, derivada e integral- en manuales y en estudiantes del Bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario,* Proyecto de Investigación financiado por el C.I.D.E. del M.E.C.

Cornu, B.: 1983, *Apprentissage de la notion de limite*, Thèse de doctorat de troisième cycle de Mathématiques pures, Université de Grenoble.

El Bouazzoui, H.: 1988, *Conceptions des éleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*, PHD, Université de Bordeaux I.

Font, V.: 1999, *Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de gràfiques aplicacions a les derivades*, Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona.

Fox, D. J.: 1981, *El proceso de investigación en Educación,* Edunsa, Pamplona.

Gascón, J.: 1998, 'Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, nº 1, pp. 7-34.

Gascón, J. y Fonseca, C.: 2000, Reconstrucción de las Organizaciones Matemáticas en las Instituciones Didácticas. *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Cangas de Marazzo (Pontevedra).

Godino, J.D. y Batanero, M.C.: 1999, 'Significado y comprensión de los conceptos matemáticos', Documento interno del Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D.: 1988, *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa,* Morata, Madrid.

Huberman, A.M. y Miles, M.: 1994, Data management and analysis methods, en N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (eds.), *Handbook of cualitative research,* Londoon :Sage Publications, pp. 428-444

Radford, L.: 1997, On Psychology, Historical, and the Teaching of Mathematics. Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17, 1, pp. 26-33.

Ruiz, L.: 1994, *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Sánchez, C. y Contreras, A.: 1995a, Concepciones de los alumnos de COU en torno a la noción de límite de una función, *VII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas "Thales",* Córdoba.

Sánchez, C. y Contreras, A.: 1996a, Un estudio sobre la evolución del proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite funcional en los siglos XIX y XX, *ICME 8*, Sevilla (España).

Sánchez, C. y Contreras, A.: 1996b, Un estudio sobre la noción de límite de una función a través del análisis de manuales de los siglos XIX y XX, *ICME 8*, Sevilla (España).

Sánchez, C.: 1997, *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Sánchez, C. y Contreras, A.: 1997, Evolución del concepto de límite de una función, respecto a su introducción, en manuales universitarios. (1950-1970), *VIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Salamanca.

Sánchez, C. y Contreras, A.: 1998, 'Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: Una perspectiva desde los obstáculos', *Enseñanza de las Ciencias*, 17, 1, pp. 73-84.

Schneider-Gilot, M.: 1988, *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*, Tesis Doctoral, Lovain-La-Neuve.

Schubring, G.: 1985, 'Essais sur l'histoire de l'enseignement des Mathématiques'. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 5, 3, pp. 343-385.

Schubring, G.: 1987, 'On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as texbook Author', *For the Learning of Mathematics,* 7, 3, 41-51.

Sierpinska, A.: 1985, 'Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 6, nº 1, pp. 5-67.

Sierpinska, A.: 1987, 'Humanities students and epistemological obstacles related to limits', *Educational Studies in Mathematics* 18 , pp. 371-397.

Sierpinska, A.: 1990, 'Some remarks on understanding in mathematics', *For the Learning of Mathematics*, vol. 10, pp. 24-36.

Sierpinska, A.: 1991, 'Some remarks on understanding in mathematics', Versión de Sierpinska, A.: 1990, 'Some remarks on undertanding in mathematics', *For the Learning of Mathematics*, vol. 10, pp. 24-36. Presentado al Canadian Mathematics Education Study Group. Vancouver.

Sierpinska, A.: 1997, *La compréhension en mathématiques*, in Boeck & Larcier, s.a. (ed.), París, Bruxelles.

Turégano, P.: 1993, *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cáculo Infinitesimal*, Tesis doctoral, Universidad de Valencia.

Weber, J.: 1986, *Basic content analysis*. Newbury Park, California: Sage University Press.

Wenzelburger, E.: 1993, 'Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo diferencial e integral – Una propuesta didáctica', *Educación Matemática*, vol. 5, nº 3, pp. 93-123.

Comentário a "la enseñanza del análisis matematico en el bachirellato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoria de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión"

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação de Lisboa

O projecto de investigação "Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático (limite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes del Bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario" parece muito interessante nomeadamente quando pretende estudar os problemas relacionados com o ensino e aprendizagem da Análise Matemática nos dois anos do Bachillerato e no primeiro curso da Universidade, e juntar na mesma equipa professores dos dois níveis de ensino envolvidos. O facto de se ligar o ensino da Análise Matemática no pré-universitário e no universitário é um aspecto inovador na investigação em educação matemática.

O problema da investigação bem como a motivação dos investigadores pelo tema são apresentados duma forma clara. Os conceitos envolvidos são o de limite, continuidade, derivada e integral. Considera-se como um dos fenómenos didácticos fundamentais dentro do ensino da matemática o da "algebrização do cálculo diferencial escolar" que se manifesta num enfoque algébrico e reducionista do cálculo e se baseia nas operações algébricas com limites, derivadas e integrais, o que, para o autor implica tratar duma forma simplista as ideias e técnicas específicas da análise. A partir deste fenómeno emerge, na sua perspectiva, um problema didáctico-matemático que se propõe investigar uma vez que é considerado que as tarefas propostas não são inocentes.

O projecto tem um duplo objectivo:

- a identificação dos factores e fenómenos didácticos que influenciam uma adequada compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos fundamentais da Análise Matemática: limite, continuidade, derivada e integral;
- o conseguir uma harmonização do ensino, através de estratégias de ensino e aprendizagem situações didácticas adequadas, nos cursos que existem nos dois níveis educativos (Bachillerato-Logse e Universidade).

Foram definidos os seguintes objectivos específicos:

1. Análise epistemológica da evolução e génese histórica das distintas noções objecto de estudo.
2. Análise comparativa de livros de texto actuais, segundo autor e nível de ensino, em relação aos conceitos de limite, continuidade, derivada e integral.
3. Estudo qualitativo-quantitativo da evolução de concepções e obstáculos dos alunos, através de questionários aplicados antes e depois do ensino dos conceitos.
4. Realização de um diagnóstico, considerando os resultados obtidos, sobre os conteúdos e o tipo de ensino a realizar em ambos os níveis de ensino com o objectivo de conseguir a sua harmonização.

Segundo os autores, esta investigação assenta em duas ideias fundamentais: a de obstáculo epistemológico e a de acto de compreensão. A noção de obstáculo epistemológico está inserida numa perspectiva da matemática como um sistema cultural (Sierspinka, 1994) estando os elementos deste sistema divididos em três níveis: o formal, o informal e o técnico. No nível formal estão elementos como crenças e julgamentos sobre o que é a matemática e quais os métodos que são aceitáveis para prova em matemática; ideias sobre como se dá a evolução da matemática, por exemplo, se por acumulação ou através da prova-refutação (Lakatos, 1976); atitudes filosóficas e intuições culturais. No nível informal encontra-se localizado o saber implícito que permite aos matemáticos pôr e resolver problemas. No nível técnico encontram-se as teorias matemáticas e os conhecimentos verbalizados e validados. Alguns elementos do nível formal e informal podem ser fontes de obstáculos epistemológicos, que têm de ser ultrapassados pelos alunos se um novo conceito é para ser desenvolvido (Sierspinka, 1994).

O projecto propõe-se "estudar a evolução das concepções dos alunos", mas não fala de concepções alternativas *(alternative frameworks)*, embora considere que "as respostas erróneas dos alunos não ocorrem ao acaso, mas estão associadas aos distintos obstáculos inerentes aos conceitos e aos processos de transposição didáctica". Não é clarificado o que se entende por 'respostas erróneas', nem se elas resultam de "concepções erróneas" (*misconceptions)* ou de concepções alternativas. Na minha opinião, num estudo em que se pretende estudar "a evolução das concepções dos alunos" faz falta uma discussão à volta destes termos.

Concepção errónea tem diferentes sentidos na literatura. Por exemplo, no estudo de Davis e Vinner (1986), as respostas dos alunos são interpretadas sob o ponto de vista da matemática formal. Concepções erróneas foram consideradas como sendo as diferenças entre as respostas dos alunos e a definição formal do conceito. Por exemplo, os autores afirmam que na seguinte frase "o limite de uma sucessão é o fim da sucessão. É o quanto longe que a sucessão pode ir, até não haver mais ou não poder mais", contém pelo menos a seguinte concepção errónea: "assumir que a sucessão tem um último termo, uma espécie de a ∞" (Davis e Vinner, 1986, p. 294).

Strike (1983) define concepção errónea do seguinte modo:

"Uma concepção errónea é uma suposição eventualmente importante no sistema de crenças (*beliefs*) do aluno. É algo que gera erros. É uma parte importante da ecologia conceptual do aluno que serve para seleccionar ou rejeitar outras ideias ou para interpretá-las como mais ou menos inteligíveis" (p. 73).

Para ele a concepção errónea é algo importante e profundo na mente do aluno – é algo que está para além duma simples comparação com a perspectiva científica. Strike apresenta o seguinte exemplo: "uma criança desenhou uma figura de astronauta a ir da Terra para a Lua num foguetão. A figura mostrava o foguetão a tornear a Lua e a aterrar no outro lado que era representado de forma mais ou menos plana" (Strike, 1983, p. 72). Podemos considerar que "a Lua é plana" é uma concepção errónea. No entanto, a um nível mais profundo, a concepção errónea pode ser a suposição de um absoluto "em baixo" e "em cima". A perspectiva da concepção errónea de Strike parece ser mais profunda do que a de Davis e Vinner. Strike vai além das afirmações dos alunos, tentando dar sentido a essas afirmações num contexto mais amplo. Strike consegue perceber mais significado e ter uma perspectiva mais profunda e intrínseca das concepções dos alunos.

O termo "concepção alternativa" foi introduzido por Driver e Easley (1978) e parece-me ser mais um passo no sentido da compreensão das concepções dos alunos como concepções legítimas. Para estes autores, concepções alternativas "são tentativas de explicação de eventos e de abstracção daquilo que é comum a esses eventos" (p. 62). Por exemplo, numa sala de aula de Ciências os alunos tinham a tarefa de pesar diferentes objectos com uma balança de mola. Um dos alunos fazia experiências com um objecto pesando-o a diferentes alturas. Quando questionado sobre o que estava a experimentar, confessou, surpreendido, que o peso do objecto não mudava consoante a altura e explicou o motivo da sua surpresa:

"Aqui está mais alto e a gravidade puxa com mais força quanto mais alto está. Quanto mais alto está maior é o efeito da gravidade, pois se tu estiveres aí e alguém deixasse cair um berlinde em cima da tua cabeça não te magoaria. Mas se eu largar um berlinde de um avião e ele atingisse alguém na cabeça podia matá-lo" (Driver *et al.*, 1985, p. 2).

Esta afirmação do aluno mostra que a ideia de que os objectos pesam mais se estiverem a uma maior altura é uma ideia com base nas experiências do aluno e, consequentemente, tem direito a ser considerada correcta no contexto dessas experiências. Dizer simplesmente que o aluno tem uma concepção errónea sobre peso é passar sobre uma quantidade de factores que constituem o significado de peso para o aluno.

Hills (1989) elabora sobre a noção de concepção alternativa de Driver e Easley (1978) propondo que as concepções dos alunos devem ser interpretadas no seu próprio contexto em vez de comparadas com a perspectiva científica ou medidas pela perspectiva científica. Sierspinka (1994) considera que numa aula de matemática, compreensão tem lugar num ambiente social que tem muitas componentes ou dimensões diferentes. Assim, a compreensão que os alunos desenvolvem, a partir duma dada actividade, depende do 'contrato didáctico' que se estabelece entre o professor e os alunos nessa situação particular.

Assim, para encontrar uma concepção alternativa é necessário ter acesso às ideias dos alunos de várias maneiras. O mais importante é tentar perceber como é que as concepções funcionam para os alunos e não para o investigador ou fazer comparações com a perspectiva científica.

Portanto, um esquema de pensamento ou uma regra que um indivíduo usa pode funcionar como um obstáculo num certo momento da evolução da cultura matemática (desse indivíduo), somente quando o indivíduo não tem consciência da limitação desse esquema ou dessa filosofia, e se a atitude do indivíduo é a de acreditar na filosofia subjacente ao esquema de pensamento, em vez de fazer uma escolha e ter consciência das consequências dessa escolha.

Moura (1995) explica a diferença entre concepção alternativa e concepção errónea. Na sua perspectiva da definição de obstáculo epistemológico resulta que uma concepção alternativa é influenciada pela perspectiva que o aluno tem da Matemática. Por exemplo, em Sierspinka (1987) um dos alunos entrevistados afirma que 0.9(9) denota 0.9999...9 e que 0.9(9) é somente uma aproximação de 1. Este aluno tem uma atitude finitista e uma perspectiva do conhecimento científico intuitiva e empiricista. Esta perspectiva do conhecimento científico que o aluno tem constitui uma fonte de obstáculo epistemológico à compreensão da definição formal de limite. Enquanto o aluno "não se der conta" das limitações da sua perspectiva científica não pode transpor o obstáculo que o leva a não compreender a definição formal de limite.

No estudo desenvolvido por Moura (1995) foram investigadas e interpretadas, usando a metodologia subjacente à noção de concepção alternativa, as ideias de três alunos universitários (que tinham no mínimo feito uma cadeira de Análise Infinitesimal), sobre a noção de limite. Os três alunos apresentaram modelos para a noção de limite envolvendo ideias dinâmicas, e comutaram entre representações algébricas e geométricas, enquanto pensaram num problema geométrico sobre limites. A autora conclui que enquanto a definição formal de limite é estática, estes alunos apresentaram concepções alternativas dinâmicas. Este estudo confirma que representações múltiplas ajudam os alunos a articular os conceitos facilitando a crítica, o teste e a implementação das ideias que usam durante o estudo desses conceitos (Moura, 1995). Também o estudo sobre convergência realizado por Moura e Costa (1997), no âmbito do projecto AMECC (Aprendizagens em Matemática: um estudo sobre a construção de conceitos), confirma que os alunos olham para as sucessões como objectos dinâmicos e consequentemente, a correspondente noção de convergência é representada por modelos dinâmicos.

No projecto aqui apresentado por Contreras foram formuladas quatro hipóteses de trabalho, tendo por base experiências anteriores dos investigadores. A primeira afirma que relativamente às situações de ensino, os livros de texto e os alunos mostram umas concepções que podem, no geral, identificar-se com o que o estudo histórico determina sobre a noção. A segunda refere que no tratamento didáctico dos conceitos nos textos dirigidos aos alunos não aparece uma sequenciação adequada para provocar os actos de compreensão do aluno que o permitam superar os obstáculos inerentes ao conceito e ao processo de transposição didáctica. Na terceira afirma-se que os alunos dos dois níveis educativos não mostram, em geral, uma evolução na compreensão dos conceitos objectos de estudo, enquanto ampliação das suas concepções e superação dos obstáculos, uma vez recebida a instrução. Por último refere-se que as respostas erróneas dos alunos não acontecem por acaso, mas estão associadas a diferentes obstáculos inerentes aos conceitos e ao processo de transposição didáctica.

A amostra é formada por 30 alunos do Bachillerato-Logse, 30 alunos do 1º ano da universidade e 10 livros de texto. Uma vez que acreditamos que as concepções devem ser interpretadas no seu próprio contexto, parece-me bastante relevante o estudo dos livros de texto, mas não seria igualmente relevante o perceber o tipo de ambiente de sala de aula que vai para além disso e que tem a ver o tipo de organização da aula, com o tipo de tarefas propostas, e como é feita a sua condução pelos professores?

Na metodologia é afirmado que se segue fundamentalmente uma metodologia do tipo qualitativo interpretativo, mas como instrumentos de recolha de dados indica-se um questionário escrito "para o estudo da evolução das concepções dos alunos" de itens com perguntas abertas e fechadas sobre as concepções e obstáculos relativos aos conceitos objecto de estudo. Acrescenta-se ainda que nos casos em que for preciso se realizarão entrevistas aos alunos que permitam aprofundar as suas concepções.

Como é referido por Moura (1995) para encontrar uma concepção alternativa é necessário ter acesso às ideias dos alunos de várias maneiras. É crucial ter em mente que o objectivo é tentar compreender como é que as concepções funcionam para o aluno. Ponte (1992) afirma que o estudo das concepções depara-se com vários problemas metodológicos. Um questionário, mesmo com perguntas abertas, parece apenas servir para começar a abordar o assunto. É preciso recorrer a entrevistas, onde em vez de perguntas directas, se propõem tarefas, situações e questões indirectas mas reveladoras que ajudem as concepções a evidenciar-se (Ponte, 1992).

REFERÊNCIAS

Davis, R. B. e Vinner, S. (1986). The notion of limit: some seemingly unavoidable misconceptions stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5,* 281-303.

Driver, R. e Easley, J. (1978). Pupil´s paradigms: a review of literature related to concept development in adoslescent science students. *Studies in Science Education, 5,* 61-84.

Driver *et al.* (1985). *Children's ideas in science*. Milton Keynes: Open University.

Hills, G. (1989). Students' untutored beliefs about Natural Phenomena. *Science Education, 73(2),* 155-186.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* New York: Cambridge University Press.

Moura, E. (1995). Concepções alternativas dos alunos sobre a noção de limite. *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Lisboa: APM.

Moura, E. e Costa, M. J. (1997). Caminhos de aprendizagem na noção de sucessão convergente. *Actas do VII Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos e J. P. Ponte (Org.), *Educação Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional e Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Sierspinka, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* London: The Falmer Press.

Sierspinka, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 371-397.

Strike, K. (1983). Misconceptions and conceptual change: philosophical reflections on the research program. *Proceedings of the International Seminar: misconceptions in science and mathematics.* Cornell University, Ithaca, NY, USA.

Sesión de Proyectos

Proyecto II

Desarrollo de técnicas interactivas de tutorización y formación. Aplicación a situaciones especiales de educación matemática.

(I.P. Dr. J.M. Fortuny)

Coordinador

Dr. Salvador Llinares Ciscar

Universidad de Sevilla

Ponente

Dr. Pedro Cobo

Replicante

Dra. Lurdes Serrazina

Universidad de Lisboa

Desarrollo de técnicas interactivas de tutorización y formación. Aplicación a situaciones especiales de educación matemática

José Mª. Fortuny
Pedro Cobo
Lourdes Figueiras
Universidad Autónoma de Barcelona

RESUMEN

El proyecto de investigación "Técnicas interactivas de tutorización y formación" tiene dos objetivos generales: identificar modelos de interacciones entre pares de estudiantes, y explorar y analizar los procesos comunicativos entre tutores y estudiantes en situaciones de educación a distancia. En ambos casos, observamos la influencia de las interacciones en el desarrollo individual del conocimiento matemático de los estudiantes y del conocimiento profesional del tutor. Analizamos casos concretos correspondientes al primer objetivo —identificación de interacciones entre pares de estudiantes—, y mostramos las características de dos de ellas: relanzamiento y cooperativas.

1. INTRODUCCIÓN

El proyecto de investigación «*Técnicas interactivas de tutorización y formación*» (DGES, convocatoria 1996) comenzó a desarrollarse en la Universidad Autónoma de Barcelona en el año 1998 con una duración prevista de dos años.

La elaboración de este proyecto respondía a una doble motivación por parte de los miembros del grupo de investigación DI del Departament de Didáctica de las Matemàtiques i les Ciències Experimentals (UAB) que estábamos investigando en ese momento el papel de las interacciones, la comunicación y las nuevas tecnologías en la educación matemática. En primer lugar, nos marcamos los objetivos de identificar modelos generales de interacciones entre dos estudiantes de 16-17 años en la resolución de problemas de matemáticas, y observar hasta qué punto dichas interacciones influyen en su desarrollo individual del conocimiento y de las habilidades heurísticas. Uno de los resultados de esta primera fase fue la presentación de la tesis de Cobo (1998), cuyas aportaciones más relevantes serán el contenido de esta presentación.

En segundo lugar, tenemos en la actualidad la preocupación por encontrar un modo de atención al alumnado que por diversos motivos no puede acudir físicamente a su centro educativo y el compromiso de encontrar el modo de asegurar la continuidad de su formación (chicos y chicas hospitalizados o que deben permanecer en sus casas por problemas de salud, deportistas de alto rendimiento, etc.). De ahí, el interés por ampliar el proceso de investigación que veníamos realizando sobre la relación de las nuevas tecnologías con los procesos comunicativos en la educación matemática. En aquel momento la utilización de Internet permitía que, desde la universidad, pudiésemos ofrecer una alternativa real para esos estudiantes, manteniendo contacto con ellos a través del correo electrónico y de video-conferencias, al tiempo que continuar investigando nuevas posibilidades de utilización de estas tecnologías. Además, el proyecto contemplaba la posibilidad de trabajo colaborativo con estudiantes en condiciones normales de escolarización, que trabajaban parte del curriculum en contacto con tutores de la universidad a través de Internet. Así el segundo objetivo general del proyecto de investigación persigue “explorar y analizar los procesos comunicativos que tienen lugar entre tutores y estudiantes en situaciones de educación a distancia y su influencia sobre el conocimiento matemático de los alumnos y el conocimiento profesional del tutor”.

El entramado de enfoques y posibilidades de investigación que reúne este proyecto fue atendido mediante la programación de diversos subproyectos que abarcan de manera operativa algunas de estas posibilidades y enfoques. Expondremos en primer lugar cuáles son, en general, las características teóricas y metodológicas que soportan las diversas investigaciones del proyecto global, salvando los matices correspondientes que competen a cada uno de aquellos proyectos más pequeños, y continuaremos con una descripción breve del trabajo realizado en cuatro de estos subproyectos.

La experiencia acumulada hasta este momento y la calidad de los resultados obtenidos avalan la necesidad de continuar con este proyecto de investigación, que precisa adaptarse al rápido crecimiento de la tecnología. Esto nos permitirá evaluar la utilidad de dicha tecnología con fines educativos, especialmente en la educación matemática. Las aportaciones de esta segunda parte serán presentadas en futuros foros de investigación.

2. ENFOQUE TEÓRICO

Existe actualmente un amplio y fructífero debate en la comunidad internacional de educación matemática sobre los enfoques teóricos en las investigaciones y su correspondiente epistemología. Las diversas interpretaciones para las investigaciones en educación matemática, que provienen del constructivismo, del enfoque socio histórico o del interaccionismo, son continuamente comparadas, enfrentadas o planteadas de modo complementario en discusiones que no sólo competen a la educación matemática sino a la educación en general (Sierpinska y Lerman, 1996). Todas estas consideraciones resultan esenciales para dar forma a la investigación en educación matemática y lo que es aún más importante, para poder trasladar el resultado de estas investigaciones a la práctica docente. Parece evidente, tal y como hemos introducido este proyecto, que nuestros puntos de vista teóricos están cercanos a los enfoques socioculturales e interaccionistas, y así es: de la teoría sociocultural, tomamos que el alumnado y también el profesorado están envueltos por la cultura y otras situaciones sociales de tipo local que hacen que no tenga sentido hablar del individuo, o del conocimiento si no es a través del contexto en el que se realiza la actividad. De otro modo no podríamos comprender, por ejemplo, en qué medida es diferente la situación de un estudiante que está hospitalizado, de la de un deportista de alto rendimiento, o de la de un estudiante que trabaja en el aula. Además, una de las principales consecuencias derivadas de la realización de este proyecto es precisamente su efecto social sobre el alumnado: la atención a los diversos contextos de diversidad en el diseño de las investigaciones y el hecho de establecer una relación entre el estudiante y alguien ajeno a su entorno habitual familiar, educativo y/u hospitalario, hace que los objetivos que se alcanzan no se refieran únicamente a las matemáticas, sino que tengan implicaciones que van más allá del contenido matemático.

Si del enfoque sociocultural recogemos el énfasis puesto en la atención al contexto, en el interaccionismo encontramos otros aportes que resultan especialmente interesantes para nuestro trabajo y para el desarrollo metodológico que tendremos en cuenta más adelante. Aunque el interaccionismo puede ser considerado como un tipo de enfoque similar al sociocultural en lo que se refiere a las fuentes y la ampliación del propio conocimiento, lo que lo distingue y se ve reflejado en nuestras investigaciones es que las interacciones (de muchos tipos) no son entendidas exclusivamente como un medio para comprender el conocimiento, sino que son consideradas inseparables de su avance. Se hace mucho hincapié, por lo tanto, en que el foco de estudio no es el individuo, sino las interacciones que tienen lugar entre ellos.

En la educación matemática, ambos enfoques tienen su origen principalmente en la psicología cultural (Cole, 1996) y el interaccionismo (Bruner y Bornstein, 1989). Los trabajos del propio Cole (op. cit.) y Bishop (1988) son especialmente importantes para considerar la idea de contexto y trabajo colaborativo. En cuanto al interaccionismo, los trabajos de Cobb y Bauersfeld (1995) son exponentes importantes de su adaptación a la educación matemática. De ellos tomamos principalmente la idea de que el aprendizaje, particularmente en las matemáticas, no es exclusivamente el intento de que el estudiante se adapte a las condiciones de su contexto cultural, sino que la construcción individual del conocimiento tiene lugar en la interacción con el resto de personas participantes del contexto, al mismo tiempo que esa interacción contribuye a la construcción de la cultura. Por otra parte, Crook (1994) realiza una importante y útil adaptación de la psicología cultural a la utilización de los ordenadores en el aula, recogiendo muchas de las propuestas del interaccionismo.

En la discusión entre estas dos teorías y el complemento entre una y otra se sitúa precisamente el marco general de nuestro proyecto, que tiene variaciones pequeñas dependiendo de cada uno de los subproyectos que se están llevando a cabo.

Así mismo, es importante entender que el contexto del aula no puede desligarse de ese otro contexto cultural en el que la tecnología está inmersa y de las reacciones sociales ante la tecnología. Estas consideraciones son las que nos permiten interpretar determinadas reacciones del profesorado, de los padres, o de los propios estudiantes hacia el uso de nuevas tecnologías (reparo ante su utilización en las aulas, miedo del profesorado a perder protagonismo en la actividad de instrucción, magnificación de las posibilidades que ofrece, etc.). En este sentido, uno de los principales aspectos que nos interesa tener en cuenta es la consideración de la *tecnología* desde un punto de vista amplio, que permita atender el contexto del aula de matemáticas, cuando son introducidas, o la viabilidad de su utilización para la educación a distancia. Uno de los usos más habituales de los ordenadores en las aulas es el de soporte de aplicaciones que facilitan la visualización y el tratamiento de los datos. Otro uso, sin embargo, mucho más novedoso y central en nuestras investigaciones, es el de soporte para la comunicación a distancia, bien a través de correo electrónico o videoconferencias.

Estas primeras consideraciones teóricas tienen una enorme cantidad de implicaciones en el momento de elaborar un soporte para las investigaciones que vamos llevando a cabo y justifican la necesidad de considerar proyectos más pequeños: nos encontraremos con situaciones de atención a distancia, en las que un único estudiante en condiciones especiales es atendido por una tutora; otras en las que el grupo-clase trabaja desde su centro y se comunica a través de un fórum con su tutor; otras en las que los alumnos utilizan aplicaciones informáticas compartidas con un tutor a través de videoconferencias, etc. Todas éstas son situaciones que caben perfectamente en nuestro proyecto pero que precisan ser consideradas de manera diferenciada.

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Teniendo en cuenta los objetivos generales de nuestro proyecto y las referencias teóricas expuestas, desde las cuales interpretamos nuestras observaciones, es claro que la metodología de investigación que elegimos presta atención a los diferentes enfoques con los que los estudiantes acceden a los conocimientos matemáticos, y se sitúa, evidentemente, en el amplio campo de los métodos cualitativos. Como señalan Denzin y Norman, (1994) la elección de una determinada técnica no puede considerarse por sí sola como garantía de una investigación de tipo cualitativo. El tratamiento de los datos y la interpretación desde un enfoque u otro adquieren entonces un valor importante y en este sentido existen matices que diferencian, dentro de nuestro proyecto, unas investigaciones de otras. No todas emplean el mismo método debido a las circunstancias, el diseño, y los participantes. No existen tampoco los mismo tipos de datos ni son tratados igualmente. Esta riqueza de métodos y enfoques nos ofrece la posibilidad de ampliar y discutir las posibilidades de utilización de los nuevos medios desde diferentes perspectivas. En general, podemos concluir que los datos son obtenidos a través de:

- Observaciones de los investigadores e investigadoras recogidas en forma de notas de campo.
- Entrevistas planificadas de acuerdo a diferentes niveles de estructuración.
- Diferentes cuestionarios (más o menos cerrados) en cuanto a la posibilidad de amplitud narrativa de la respuesta.
- Grabaciones en vídeo de acciones de aula y videoconferencias.
- Trabajos de los alumnos.

El tratamiento y análisis de los datos incorpora en general en las diversas investigaciones la perspectiva del análisis del discurso, de acuerdo a la atención que desde nuestro enfoque teórico se presta a las interacciones y al uso lingüístico contextualizado.

A continuación presentamos un resumen de la investigación que dio origen al proyecto —identificación de interacciones entre pares de estudiantes—, de la que mostramos algunos resultados, y, de forma mucho más breve, describimos otras investigaciones que se están desarrollando dentro del mismo proyecto —subproyectos TIMAH, CAR, TELEMATCAR y CLAVIJO—, y que nos ofrecerán una imagen muy concreta de la acción de investigación que venimos llevando a cabo.

4. SUBPROYECTO “IDENTIFICACIÓN DE INTERACCIONES ENTRE PARES DE ESTUDIANTES”

Los actuales movimientos de la reforma educativa ponen mucho énfasis en el papel que desempeña la interacción social en el aprendizaje matemático de los estudiantes. Esta tendencia está de acuerdo con las ideas de Vygostki sobre el hecho de que los procesos interpersonales son la base de los procesos intrapersonales. Siguiendo esta aproximación y partiendo de la base de que a lo largo del proceso de resolución de un problema se pueden producir diferentes formas de interactuar entre los alumnos que participan (Webb, 1989), planteamos una investigación que pretende analizar la naturaleza y calidad de las interacciones que se producen en los procesos de resolución de problemas de matemáticas entre alumnos.

Para estudiar la naturaleza de las interacciones profundizamos en los tipos de intercambios que se producen y en la forma de combinarse durante el proceso de resolución. Para ello tendremos en cuenta tres aspectos: las formas sintácticas de las intervenciones —si son aserciones, preguntas, demandas de validación, respuestas, validaciones, respuestas de validación—; el carácter directivo o de gestión de las intervenciones; y las relaciones (o encadenamientos) que hay entre unas intervenciones y otras, en particular, las formas en que se producen las transiciones entre ellas —si hay pausas, solapamientos o interrupciones—. En cambio, para valorar la calidad de las interacciones, las relacionamos con las estrategias que los alumnos utilizan en el transcurso de la resolución del tipo de problemas que proponemos.

Así pues, esta investigación pretende responder, entre otras, a las siguientes preguntas: ¿qué modelos generales de interacciones se producen entre dos estudiantes de 16-17 años en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas?, y ¿hasta qué punto dichas interacciones influyen de forma significativa en el desarrollo individual del conocimiento y de las habilidades heurísticas en los procesos de resolución de problemas?

4.1. Análisis del discurso y resolución de problemas

Para comprender el papel desarrollado por las interacciones entre iguales en la promoción del conocimiento, necesitamos analizar y proporcionar información sobre los mecanismos involucrados en la comunicación de los alumnos.

En la resolución de problemas, entendemos por análisis del discurso el estudio del uso de la lengua que se produce entre personas concretas que hablan, con la intención de encontrar estrategias y de generar conocimientos que conduzcan a resolver un problema.

La comunicación en la resolución de problemas tiene unas características especiales que la diferencian de otros tipos de conversaciones. En este estudio, esas características están relacionadas con la resolución de un tipo concreto de problemas geométricos, los que comparan áreas de superficies planas, y con el hecho de que la conversación se mantiene entre dos interlocutores. En este contexto, pretendemos aportar una forma nueva de identificar y analizar las interacciones entre pares de alumnos, basada en la consideración de dos dimensiones fundamentales del análisis del discurso: *la temática y la interlocutiva*.

4.1.1. *Dimensión temática*

La dimensión temática del discurso en la resolución de problemas está relacionada con la forma en que los alumnos contribuyen al desarrollo del proceso de resolución. En el análisis de la construcción temática diferenciamos tres unidades, que, ordenadas de menor a mayor rango, son: la intervención, el intercambio y la interacción.

Definimos la intervención como la aportación temática de un individuo al desarrollo de lo que se habla y sobre lo que dará información o tomará posición

(Calsamiglia y Tusón, 1999). En el contexto en el que nos movemos, la aportación temática que realiza cada alumno está relacionada con los contenidos matemáticos que utiliza en la resolución de los problemas.

El intercambio es la unidad dialogal más pequeña. Lo definimos en términos de acción-reacción de la siguiente forma: la intervención del locutor L1 produce una reacción en su interlocutor L2 si en la intervención de L2 hay alguna referencia explícita (verbal o gestual) al contenido de la intervención de L1 o a alguno de sus elementos.

Un intercambio puede estar compuesto por dos intervenciones. En este caso, a la primera la llamamos iniciativa (acción) y a la segunda, reactiva (reacción). Es posible que la intervención iniciativa de un locutor no produzca reacción en su interlocutor. En este caso consideramos que el intercambio está formado por una sola intervención. La estructura más "normal" de un intercambio es la formada por tres intervenciones (Roulet et al., 1987) en el siguiente orden: intervención iniciativa, reactiva y evaluativa.

Consideramos las interacciones como una sucesión de intercambios. En nuestro caso, proponemos una delimitación de las mismas basada en lo que llamamos episodios sociales, que son periodos de tiempo en los que los estudiantes culminan una fase del proceso seguido por un resolutor real, en el sentido de Schoenfeld (1985); o interpretan o se benefician de una mayor comprensión de los conceptos y procedimientos involucrados en la resolución de problemas, gracias a su confrontación; o incluso implementan un enfoque que les conduce directamente a la solución.

4.1.2. *Dimensión interlocutiva*

La dimensión interlocutiva del discurso es la mecánica de la comunicación y de los comportamientos comunicativos de cada interlocutor (Calsamiglia y Tusón, 1999).

Cuando nos referimos a la mecánica de la comunicación queremos significar el origen y la forma en que los interlocutores toman la palabra: si lo hacen por iniciativa propia (autoselección), es decir, si no hay indicaciones implícitas ni explícitas en la intervención de un locutor que sugiera a su interlocutor tomar la palabra; o si lo hacen como consecuencia de una solicitud de otros individuos (heteroselección), es decir, si hay indicaciones explícitas (preguntas directas, imperativos o aserciones seguidas de demandas de respuesta) por parte de un locutor que sugieran a su interlocutor tomar la palabra.

4.2. Identificación de intercambios en la resolución de problemas

En el análisis de los comportamientos (o papeles) comunicativos de los alumnos, y, por tanto, en el de las interacciones, integramos las dimensiones temática e interlocutiva del discurso, definiendo diferentes tipos de intercambios, en los que tenemos en cuenta los contenidos matemáticos de las intervenciones de cada alumno, las formas sintácticas y las relaciones entre las diferentes intervenciones.

De entre todos los tipos de intercambios que hemos identificado en nuestros análisis (Cobo, 1998), mostramos a continuación la definición de algunos de ellos.

En un intercambio "cooperativo", la intervención de L2 modifica de alguna forma el contenido de la intervención de L1, ya sea: *i)* introduciendo alguna información equivalente a la intervención de L1, *ii)* aportando alguna información nueva que complemente a la intervención de L1, o *iii)* introduciendo en el diálogo algún elemento nuevo.

En un intercambio del tipo "pregunta-respuesta", L2 se limita a responder a la pregunta efectuada por L1, cuyo contenido no hace referencia al de intervenciones anteriores.

En un intercambio del tipo "validación-continuación", L2 se limita a validar el contenido (o simplemente a repetir una parte del mismo con la intención de confirmarlo) de la intervención de L1 y éste continúa el discurso haciendo referencia a su última intervención. Consideramos dentro de esta categoría los intercambios en los que el alumno L1 afirma una proposición y demanda validación, se produce la validación por parte de L2, y L1 vuelve a hacer referencia a la afirmación de su intervención anterior.

En un intercambio del tipo "aclaratorio", L2 se limita a pedir explicación (o bien confirmación) del contenido de la intervención de L1 (o de alguno de sus elementos) y L1 responde a dicha demanda.

En los dos últimos intercambios que hemos definido, la continuación del discurso por parte de L1 se puede producir en términos de simple repetición del contenido de su primera intervención, en cuyo caso tendríamos un intercambio que llamamos repetitivo, o bien aportando alguna información equivalente, complementaria, o introduciendo algún elemento nuevo; en este caso tendríamos un intercambio que llamamos progresivo.

4.3. Descripciones de las interacciones en el entorno de la resolución de problemas

Para conseguir los objetivos que nos proponemos analizamos un contexto situacional en el que dos alumnas de Enseñanza Secundaria (16 años) interactúan (hablan, escriben, hacen gestos...) para resolver problemas de matemáticas, en un tiempo de aproximadamente 25 minutos para cada problema, en presencia de un observador que no interviene y de una cámara de vídeo que registra todo el proceso de resolución. Las conversaciones de las alumnas son registradas, transcritas y analizadas desde una perspectiva cualitativa.

En la obtención de los datos orales, utilizamos el siguiente problema:

Problema del triángulo

ABC es un triángulo cualquiera y D un punto del lado AB que divide a éste en dos segmentos que están en proporción 2 a 1. Si DE y DF son segmentos paralelos a los lados AC y BC, respectivamente, ¿qué relación hay entre las áreas de los triángulos DBE y FEC?

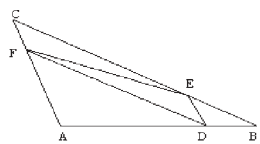

Figura 1

Para describir e interpretar detalladamente las interacciones, presentamos datos orales correspondientes a un par de alumnas: Rosa y Anna, que han sido elegidas de manera que formen una pareja heterogénea — difieren tanto en su orientación visual-algebraica como en su nivel académico—, para facilitar la comunicación entre ellas.

En esta presentación describimos sólo dos formas de interactuar de Rosa y Anna, otras formas se pueden encontrar en Cobo (1998) y Cobo y Fortuny (2000).

4.3.1. *Modelo interactivo de relanzamiento del proceso de resolución. Episodio social de análisis/exploración*

En el inicio de la resolución del problema del triángulo, Rosa y Anna tratan de comprender el enunciado del problema e interpretan la proporción de los segmentos AD y DE (Figuras 2 y 3).

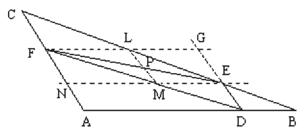

Figura 2. Reproducción de una de las figuras de las alumnas (con letras añadidas)

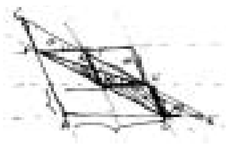

Figura 3. Figura final dibujada por Anna y redibujada por Rosa

El episodio de análisis/exploración comienza con la identificación de la igualdad de los triángulos FDE y FEC (Figura 2). En el resto del episodio, observamos una forma de actuar de las alumnas que se repite tres veces consecutivas. Cada una de estas formas de actuar consta a su vez de cuatro partes: la identificación del objetivo del problema —llegar a relacionar las áreas de los triángulos FEC y DBE—; el trabajo en paralelo con referencias gestuales a los elementos de las figuras o con pausas largas (más de 30 segundos); la introducción de información nueva, siempre relacionada con el trazado de paralelas a los lados de los triángulos; y la búsqueda exploratoria de relaciones entre los triángulos obtenidos con la división de la figura original y entre los elementos lineales de dicha figura.

Interpretamos que las alumnas, cuando no saben seguir, explicitan el objetivo del problema con la finalidad de tener presente a dónde quieren llegar (intervenciones 26 y 27).

26. Anna: ***Relación entre***... [señala FEC y DBE].

27. Rosa: ***Entre éste de aquí*** [FEC] ***y éste de aquí*** [DBE] <pausa(35)>

La referencia al objetivo marca el inicio de una situación de bloqueo de la que las alumnas tratan de salir reflexionando individualmente sin realizar ningún gesto (pausa de la intervención 27). Tras esa reflexión individual, las alumnas hacen aportaciones, siempre de la misma naturaleza: trazado de paralelas a los lados del triángulo (intervención 28).

28. Anna: [Traza por F una paralela a AB, Fig. 2]. *Si trazamos...*[indica dicha paralela en la Fig. 3]. *Éste* [FME] *es igual que éste* [FLE], *¿no?, serán iguales. Éste que queda arriba* [FLC], *¿no es igual que éste?* [DBE], *no, ¿o sí? Yo diría que sí* [se va a la figura del enunciado y simula trazar la paralela a AB por F], *no.*

Esa aportación de información les abre la perspectiva de la búsqueda de relaciones entre los elementos de los nuevos triángulos que se obtienen. En este caso, esa búsqueda de relaciones se centra en intentos de comparación de los triángulos (FME y FLE, FLC y DBE, intervención 28) y de los segmentos que resultan (intervenciones 31 a 34).

31. Rosa: *El trozo de aquí* [DB] *¿cómo sería con éste de aquí?* [DE].

32. Anna: *Yo diría que este trozo de aquí a aquí* [AN] *es igual que éste de aquí* [DE], *claro, porque son paralelas, una paralela...* [indica DE y AC].

33. Rosa: *Sí, sí, éste de aquí* [DE] *sería el mismo que éste de aquí* [FL].

34. Anna: *Yo diría que este trozo* [FL] *sería el mismo que éste* [DB], *¿no?, porque si partimos de aquí a aquí...* [AN].

Esta sucesión de intervenciones se inicia con un intercambio pregunta-respuesta. En él, Rosa pregunta sobre la relación que hay entre los segmentos DB y DE (intervención 31), y Anna responde a dicha pregunta (intervención 32), aunque, en este caso, la intervención de Anna no sea una respuesta directa a la pregunta de Rosa, posiblemente porque no hay una relación determinada entre los segmentos DB y DE. El contenido de la pregunta de Rosa no hace referencia al de la intervención anterior de Anna —"Sí que debería de ser" (intervención 30)—, en la que sólo confirma la igualdad de los triángulos FLC y DBE introducida por ella misma en la intervención 28.

El papel comunicativo que asumen las alumnas en esta parte de búsqueda de relaciones, tras la intervención 28, empieza con un intercambio de validación-continuación, iniciado por ellas mismas, al que sigue un diálogo cooperativo (intercambios 31 a 35), que comienza con la pregunta de Rosa (intervención 31). Ese diálogo cooperativo aporta informaciones que aparecen por primera vez en el proceso de resolución, aunque alguna de ellas no sea correcta (intervención 33). La cooperación degenera en una sucesión de dos intercambios (intervenciones 35 a 39) en los que Rosa lleva la iniciativa y Anna se limita simplemente a validar las afirmaciones, seguidas de demandas de validaciones, de su compañera.

35. Rosa: *Porque si trazamos esta paralela* [paralela a AB por F], *este trozo que nos queda aquí, éste de aquí* [FME] *es el mismo que éste de aquí* [FLE], *¿no?*

36. Anna: *Sí.*

37. Rosa: *Y éste de aquí...* [DBE], *éste de aquí* [MDE] *y éste de aquí* [FLC] *son iguales, ¿no?*

38. Anna: *Sí.*

39. Rosa: *Hemos de buscar la relación entre éste* [FEC] *y éste* [DBE].

Los dos intercambios dirigidos por Rosa acaban (intervención 39) con la identificación del objetivo, lo que origina una nueva repetición de la forma de actuar que hemos descrito.

Como hemos dicho anteriormente, en este episodio las alumnas hacen tres aportaciones sobre el trazado estratégico de paralelas: Rosa, en una intervención gestual, traza la paralela a AB por E. Ésta es una nueva habilidad heurística.

15. Rosa: [Traza por E una paralela a AB y señala los triángulos MDE y DBE, Fig. 2].

Anna traza la paralela a AB por F (intervención 28) y Rosa vuelve a trazar la paralela a AC por M (intervención 41).

41. Rosa: *Y éste de aquí, así* [traza el segmento LM y señala el triángulo MEL] *es igual que éste* [MDE], *¿no?*

Estas tres aportaciones tienen su origen en un trabajo en paralelo o reflexiones individuales. Las relaciones entre los elementos de las figuras que obtienen como consecuencia de dichas aportaciones contribuyen de forma definitiva a obtener una solución del problema.

La interacción que hemos identificado en este episodio —a la que llamamos de *relanzamiento* del proceso de resolución— es una de las formas con que las alumnas afrontan la búsqueda de nuevas relaciones entre los elementos de las figuras. Rosa y Anna reproducen formas de actuar que se basan, esencialmente, en: explicitaciones del objetivo, reflexiones individuales, tras las cuales suelen introducir informaciones nuevas que son analizadas conjuntamente para generar nuevas informaciones.

4.3.2. *Modelo de interacción cooperativa. Episodio social de evaluación local*

Ambas alumnas mantienen un diálogo formado en su mayoría por intercambios cooperativos (parte de ese diálogo lo mostramos en la Figura 4). En él, ambas alumnas se suelen referir a los resultados obtenidos anteriormente con frases que comienzan por: "Aquí hemos trazado...", "hemos llegado a...", etc. Esa forma cooperativa de interactuar conecta, en un momento determinado (intervención 61), con la introducción de informaciones nuevas.

En este diálogo cooperativo (Figura 4), las alumnas solicitan explícitamente —mediante demandas de validación— en dos ocasiones (intervenciones 54 y 55) la toma de palabra a su compañera, y en otras tres (intervenciones 51, 52 y 57) de una forma implícita —dejando las frases sin acabar—.

51. Rosa: [Pone letras en los vértices]. *Aquí hemos trazado esta paralela* [paralela por E a AB], *que pasa desde aquí...*

52. Anna: *Hemos llegado a que éste...* [MDE].

53. Rosa: *Éste de aquí* [MDE] *es igual a éste* [DBE].

54. Anna: *Porque la misma distancia que hay de aquí a aquí* [NA], *hay de aquí a aquí* [DE], *¿no?*

55. Rosa: *Sí, y el mismo ángulo, éste* [NAB] *es éste de aquí* [EDB], *¿ves?*

56. Anna: *Porque son paralelas, porque éstas dos son paralelas* [EN y AD], *ésta* [BE] *y ésta* [DM] *son iguales.*

57. Rosa: *Sí, (...) entonces hemos dicho que si hacemos una paralela a ésta* [AB] *que pase por...*

58. Anna: *Que pase por el punto F.*
*59.*Rosa: *Por el punto F.*
60. Anna: *Y paralela a AB.*
61. Rosa: *(...) , éste y éste* [ME y LG] *son iguales y éste y éste* [DE y GE] *son iguales y la relación de los ángulos también* [no especifica cuáles], *por tanto, éste* [DBE], *éste* [MDE] *y éste* [LEG] *también son iguales, ¿no?*

Figura 4. Interacción de Rosa y Anna en el episodio social de evaluación local de la resolución del problema del triángulo

La sucesión de intercambios cooperativos garantiza la igualdad de la contribución hecha por las dos alumnas al progreso del proceso de resolución, porque cada intervención aporta alguna contribución nueva o equivalente a la última (Figura 4).

Tenemos aquí un tipo de interacción en el que las alumnas recurren a reproducciones de lo que han conseguido hasta ese momento, asumiendo por igual la responsabilidad en la continuación del diálogo. Esta forma de actuar les sirve de trampolín para generar ideas nuevas. Estamos ante una interacción formada mayoritariamente por intercambios cooperativos a la que llamamos interacción *cooperativa*.

5. INFLUENCIA DE LOS MODELOS INTERACTIVOS. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Analizamos y discutimos esta sección desde un enfoque interaccionista siguiendo el punto de vista emergente de los resultados obtenidos por Yackel y Cobb (1996), y Hershkowitz y Schwarz (1999), en los que se supone que la interacción social facilita el aprendizaje. Cuando pares de alumnos colaboran en la resolución de problemas, se generan una serie de cambios en el aprendizaje. En nuestro caso, estos cambios u oportunidades, que expresamos en términos de beneficios cognitivos, están asociados a la posibilidad de mejora en los procesos argumentativos; a las habilidades heurísticas, normalmente trazado de líneas rectas; a formas de enfocar los problemas; y a formas de generar nuevas ideas dentro de los procesos de resolución del problema.

En los siguientes parágrafos analizamos la influencia de las interacciones, descritas en la sección 4, sobre el desarrollo cognitivo de las alumnas. En concreto, relacionamos las contribuciones temáticas y los procesos interlocutivos en los que se generan tales contribuciones con los beneficios cognitivos de las alumnas (ver Tabla I).

La realización de preguntas, que no se refieran explícitamente al contenido de la intervención anterior, dan una nueva orientación al diálogo, siempre que las informaciones nuevas que se introduzcan se conviertan en objeto de discusión. Éste es el caso que analizamos en el episodio de exploración/análisis de la resolución del problema del triángulo (ver Sección 4.3.1). En él, Rosa y Anna reproducen formas de interactuar que se basan, esencialmente, en identificaciones del objetivo, a las que siguen reflexiones individuales, tras las cuales suelen introducir informaciones nuevas —generalmente en forma de preguntas—, que son analizadas conjuntamente y que sirven para relanzar la búsqueda de relaciones entre los elementos de las figuras. A este modelo de interacción le llamamos de *relanzamiento* del proceso de resolución. Rosa y Anna llegan a desbloquear, de esa forma, el proceso de resolución.

Las contribuciones temáticas en esta interacción están relacionadas con el trazado de rectas paralelas a los lados del triángulo, y con la búsqueda exploratoria de igualdades entre los segmentos y triángulos que resultan. En el primer caso, se producen después de reflexiones individuales; en el segundo, en diálogos cooperativos o dirigidos por una de las alumnas.

La relevancia del trazado de rectas paralelas a los lados del triángulo significa que las oportunidades de aprendizaje que se presentan en este episodio están asociadas a ese tipo de habilidades heurísticas así como al enfoque geométrico que tras ellas se genera.

La revisión cooperativa de los resultados que las alumnas han obtenido previamente, genera nuevas ideas, lo que contribuye de forma positiva al desarrollo del proceso. Éste es el caso de la actuación de las alumnas en el episodio social de evaluación local de la resolución del problema del triángulo (ver Sección 4.3.2). Aquí los intercambios cooperativos están formados por intervenciones cuyos contenidos matemáticos han aparecido ya en el proceso de resolución (y las alumnas simplemente los repiten). Además, ellas asumen papeles comunicativos similares, puesto que sus intervenciones son aserciones, seguidas en la mayoría de los casos por solicitudes (explícitas e implícitas) de continuación del diálogo.

Creemos que todos las interacciones que hemos identificado pueden formar parte del proceso de aprendizaje de las alumnas. A pesar de ello, la interacción cooperativa puede ser más fácil de asimilar, puesto que las contribuciones temáticas nuevas se producen sólo al final de ella y no durante la propia interacción. Sin desmerecer la importancia de este último tipo de interacción cooperativa, creemos que es muy útil fomentar los diálogos cooperativos en los que cada alumna haga contribuciones que no hayan aparecido previamente en el proceso de resolución.

INTERACCIÓN	CONTRIBUCIONES TEMÁTICAS	INTERCAMBIOS	BENEFICIOS COGNITIVOS
Relanzamiento	Identificación de la igualdad de triángulos. Comparación de segmentos. Trazado de paralelas. Búsqueda exploratoria de igualdades de triángulos.	Reflexiones individuales seguidas de breves diálogos (cooperativos o guiados por una de las dos alumnas).	Generación de enfoques geométricos. Oportunidad de mejora en la búsqueda de nuevas igualdades. Habilidades heurísticas (trazado de rectas paralelas).
Cooperativa	Revisiones de resultados previos.	En intercambios cooperativos.	Oportunidad de aprender a generar nuevas ideas.

Tabla I. Resumen de las interacciones identificadas y sus efectos sobre el aprendizaje de las alumnas.

Las contribuciones de esta investigación a la identificación de las interacciones y a la evaluación de la productividad en la resolución de problemas son consecuencia de tres decisiones que hemos tomado en el diseño de la investigación que presentamos: la agrupación de los alumnos por parejas, la no intervención del observador en el proceso de resolución y la decisión de haber sacado las observaciones fuera del contexto de la clase. Por tanto, quedan abiertas a nuevas investigaciones, entre otras, cuestiones como la adaptación y ampliación del modelo de intercambios propuesto al caso de más de dos alumnos y de éstos con el profesor, y la identificación de nuevas formas de interactuar en la resolución de problemas por parejas en otros contextos.

6. SUBPROYECTO TIMAH

Esta investigación se dirige específicamente a la tutorización de estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria en situación de hospitalización o en sus casas por causa de alguna enfermedad o indisposición de larga duración. Trabajamos en concreto con alumnos que están en tratamientos oncológicos, traumatológicos o de hemodiálisis. Desde la universidad contactamos con los centros hospitalarios correspondientes, con el centro escolar y con la familia del estudiante para diseñar e implementar una unidad de contenidos con la que pueda trabajar a través de Internet y comunicarse con un tutor que oriente su trabajo.

Entre los objetivos de investigación de este proyecto, destaca la atención a variables afectivas y del entorno que influyen en el aprendizaje del estudiante.

7. SUBPROYECTO TELEMATCAR

Esta investigación se dirige especialmente a la atención a alumnos del Centro de Alto Rendimiento Deportivo de Sant Cugat (CAR) cuando están en su instituto habitual, ubicado en las mismas instalaciones del CAR. Los alumnos que han elegido la asignatura de estadística como asignatura optativa llevan a cabo parte de sus actividades y ejercicios utilizando la hoja de cálculo MSExcel, pero no es su profesor habitual el que trabaja con esta herramienta, sino un tutor en la universidad, con quien se conectan a través de videoconferencia.

El principal objetivo de la investigación es la utilización de aplicaciones útiles para visualizar o facilitar cálculos matemáticos cuando son compartidas en situaciones de educación a distancia.

Estos estudiantes, debido a sus especiales condiciones de deportistas, han de pasar una gran parte del periodo escolar fuera del aula. Llegar a familiarizarse con este tipo de tecnologías favorece que, en el momento de realizar una estancia en otro lugar, sea posible mantener contactos a distancia con ellos a través de estos dispositivos sin que sea necesario una preparación previa por lo que se refiere a la utilización de la tecnología.

8. SUBPROYECTO CAR DE TUTORÍA A DISTANCIA

En este caso la atención que se presta al estudiante del CAR es individual, durante el tiempo que permanece fuera del centro escolar. El contenido curricular que el alumno hubiera de atender durante ese periodo de tiempo en el instituto habitual es adaptado y "colgado" en Internet para que pueda acceder a él. Uno de los investigadores en la universidad actúa como tutor durante todo el periodo, modificando y adaptando el diseño de la tutoría según requieran las circunstancias técnicas o de adaptación del estudiante a la nueva situación.

El objetivo principal de esta investigación es conocer cómo se crea la relación entre un estudiante y un tutor cuando están en una situación de enseñanza a distancia, y las características que la diferencian de lo que sucede en una clase presencial.

9. SUBPROYECTO CLAVIJO

Esta investigación se lleva a cabo con alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria que trabajan en su centro habitual con el programa interactivo de geometría CABRI. Discuten a través de un foro electrónico el modo en el que van trabajando y son tutorizados y orientados por un tutor, también en la universidad, al que no conocen.

El objetivo de este proyecto es analizar la utilización de este programa para el aprendizaje de la geometría y la visualización en situaciones de colaboración a distancia.

REFERENCIAS

Bishop, A.: 1988, *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Bruner, J.S. y Bornstein, M.H.: 1989, "On interaction". En Bruner & Bornstein (eds.) *Interaction in Human Development,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Calsamiglia, H. y Tusón, A.: 1999, *Las cosas del decir. Manual de análisis del discurso.* Ariel Lingüística.

Cobb, P. y Bauersfeld, H.: 1995, *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Cobo, P.: 1998, *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos*. Tesis. Universitat Autònoma de Barcelona. No publicada.

Cobo, P. y Fortuny, J.M.: 2000, "*Social interactions and cognitive effects in context of area-comparison problem solving*". En prensa.

Cole, M.: 1996, *Cultural Psychology. A one and future discipline.* Harvard University Press.

Crook, CH.: 1994, *Computers and the Collaborative Experience of Learning*. Routledge, London. [Edición en español: Ordenadores y aprendizaje colaborativo. Morata-MEC, 1998].

Denzin y Norman, K.: 1994, *The Handbook of Qualitative Research*. Sage, London.
Hershkowitz, R. y Schwarz, B.: 1999, "The emergent perspective in rich learning environments: some roles of tools and activities in the construction of sociomathematical norms". *Educational Studies in Mathematics* 39: 149-166.
Roulet, E. et al.: 1987, *L'articulation du discours en français contemporain.* Berna: Peter Lang.
Schoenfeld, A. H.: 1985, *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc. Orlando.
Sierpinska, A. y Lerman, S.: 1996, "Epistemologies of Mathematics and of Mathematics education". En Bishop etal. (eds). *International Handbook of Mathematics Education* Bishop et al. Eds. Kluwer Academic Publishers, pp 827-876.
Webb, N. M.: 1989, "Peer Interaction and Learning in Small Groups". *International Journal of Education Research*, 13, 21-39.
Yackel, E., Cobb, P.: 1996, "Social norms, argumentation, and autonomy in Mathematics". *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 27, n. 4, pp. 458-477.

URL's:

http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm
http://www.blues.uab.es/_ipdm4/timaha/Teachersa.htm
http:/dewey.uab.es/jfortuny/estadistica/frame.htm
http://www.blues.uab.es/home/material/apunts/t055500/apunts.htm
http://cc.uab.es/_ipdm1/TEO.ZIP
http://blues.uab.es/_ipdmc/teo/index.htm
http://blues.uab.es/_ipdm4/informes/jmurillo/REartic.html
http://www.unirioja.es/Proyectos/Clavijo/Pag.Clavijo.htm

Comentário a "desarrollo de técnicas interactivas de tutorización y formación. Aplicación a situaciones especiales de educación matemática"

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação de Lisboa

1. INTRODUÇÃO

Os autores começam por apresentar o projecto de investigação "*Técnicas interactivas de tutorización y formación*" que têm vindo a desenvolver na Universidade de Barcelona desde 1998.

Justificam a sua motivação pelo projecto e definem como primeiro objectivo responder entre outras às seguintes questões: Que modelos gerais de interacções matemáticas se produzem entre os alunos de 16-17 anos na resolução de problemas que comparam áreas de superfícies planas?, e Até que ponto as ditas interacções têm influência de forma significativa no desenvolvimento individual do conhecimento e das capacidades heurísticas nos processos de resolução de problemas? Referem que desta primeira parte do projecto já resultou a apresentação da tese de P. Cobo (Cobo, 1998).

Neste momento os autores afirmam-se por um lado, preocupados por encontrar um modo de dar atenção aqueles alunos que, por diversos motivos (doença, atletas de alta competição, etc.), não se possam deslocar fisicamente aos centros educativos, por outro manifestam interesse em ampliar a investigação que têm vindo a realizar sobre a aplicação da tecnologia na comunicação em educação matemática. Esta contemplava a utilização da Internet, onde, através do correio electrónico, alunos em condições normais de escolarização, comunicavam com os seus tutores na universidade (Fortuny *et al*, 2000). Assim, é apresentado como segundo objectivo do projecto: "explorar e analisar os processos comunicativos que têm lugar entre tutores e alunos em situações de educação à distância e a sua influência sobre o conhecimento matemático dos alunos e o conhecimento profissional do tutor". Consideram ainda diversas situações de comunicação à distância que, na sua perspectiva, cabem perfeitamente neste projecto, mas que devem ser tratadas de modo diferenciado. O projecto é composto por vários subprojectos dos quais é apresentada uma curta descrição das intenções de cada um.

O texto apresenta depois o "Enfoque teórico" que, de acordo com os seus autores, se situa na discussão entre a psicologia cultural (Cole, 1996) e o interaccionismo (Bruner y Bornstein, 1989). Referem a ideia de contexto e trabalho colaborativo, retiradas de Cole (1996) e Bishop (1988). Dizem retirar dos trabalhos de Cobb (Cobb, 1995; Cobb e Bauersfeld, 1995) a ideia de que a aprendizagem, particularmente na Matemática, não é exclusivamente a intenção de que o aluno se adapte às condições do seu contexto cultural, mas que a construção individual do conhecimento tem lugar na interacção com o resto das pessoas participantes do contexto ao mesmo tempo que essa interacção contribui para a construção da cultura.

Afirmam estarem interessados no papel da tecnologia no sentido amplo, que permita atender ao contexto da aula de Matemática onde são introduzidas ou à viabilidade da sua utilização para a educação à distância. Consideram que devem dar especial atenção à comunicação à distância quando: um único aluno em condições especiais é atendido por um tutor; quando uma turma trabalha a partir do seu centro e comunica através de um forum com o seu tutor; outras em que os alunos utilizam aplicações informáticas partilhadas com um tutor através de video-conferências.

Esta problemática parece muito interessante e muito actual e pode conduzir a um debate, pleno de actualidade, sobre o papel da tecnologia, da escola e do professor na aprendizagem da Matemática. Por exemplo, será que as questões que se colocam quando se utiliza a comunicação através de correio electrónico, fazendo uso essencialmente da escrita, são as mesmas que se colocam quando essa comunicação é feita através de video-conferência, em que é utilizada a oralidade? Ou, qual a relação, se alguma, entre as interacções que se estabelecem quando dois alunos estão a resolver problemas em frente ao computador, debatendo entre si o processo de resolução e um aluno que está sozinho (em casa, no hospital ou no centro de estágio) a tentar resolver o mesmo problema e que apenas pode comunicar com o professor ou o tutor via correio electrónico?

É depois apresentada a "Metodologia de Investigação e análise de dados", que incluem no amplo campo dos métodos qualitativos, com os dados recolhidos através de uma variedade de processos, sendo dito que os enfoques serão diferentes de acordo com as características específicas de cada subprojecto. A análise dos dados incorpora uma perspectiva de análise de discurso, uma vez que, de acordo com o enquadramento teórico, se presta atenção especial às interacções e ao uso linguístico contextualizado.

Grande parte do texto é ocupada com a apresentação do estudo "Identificação de interacções entre pares de alunos e influência no seu desenvolvimento cognitivo". O texto termina com a apresentação sumária de quatro subprojectos:

TIMAH, TELEMATCAR, CAR E CLAVIJO, onde é feita apenas uma breve descrição de cada um, indicando os seus objectivos gerais. Todos eles parecem muito interessantes e podem fornecer respostas a necessidades reais dos alunos.

Vou agora focalizar este comentário no projecto "Identificação de interacções entre pares de alunos e influência no desenvolvimento cognitivo".

2. IDENTIFICAÇÃO DE INTERACÇÕES ENTRE PARES DE ALUNOS E INFLUÊNCIA NO SEU DESENVOLVIMENTO COGNITIVO

A apresentação deste estudo está dividida em cinco secções:

1. Introducción
2. Análisis del discurso y resolución de problemas
3. Identificación de intercambios en la resolución de problemas
4. Entorno de resolución de problemas y descripciones de las interacciones
5. Influencia de los modelos interactivos, discusión y conclusiones

Na introdução é apresentado o objectivo deste estudo, procurando integrá-lo nos movimentos actuais de reforma educativa, que destacam o papel desempenhado pela interacção social na aprendizagem matemática dos alunos. Assim, é apresentado como objectivo do estudo: analisar a natureza e qualidade das interacções que se produzem e a forma como se combinam durante o processo de resolução de problemas de matemática entre alunos. Para isso os autores aprofundaram os tipos de intercâmbios que são produzidos e a forma como se combinam durante o processo de resolução, tendo em conta três aspectos: as formas sintácticas das intervenções – se são asserções, perguntas, pedidos de validação, respostas, validações, respostas de validação; o carácter directivo ou de gestão das intervenções; e as relações (ou encadeamentos) que há entre umas intervenções e outras. Para os autores este estudo pretende responder ao primeiro objectivo geral do projecto e às duas primeiras questões enunciadas.

No ponto 2 é afirmado que na resolução de problemas entendem por análise de discurso o estudo do uso da língua que se produz entre pessoas concretas que falam, com a intenção de encontrar estratégias e de gerar conhecimentos que levam a resolver um problema. A comunicação na resolução de problemas tem características especiais, que a diferenciam de outros tipos de conversações, estando neste estudo relacionada com um tipo concreto de problemas geométricos, que comparam áreas de superfícies planas e, segundo os autores, numa forma nova de identificar e analisar as interacções entre pares de alunos, baseada na consideração de duas direcções fundamentais da análise do discurso: a temática e a interlocutiva.

Embora seja um estudo que tem por base as interacções sociais, as interacções entre pares são analisadas apenas na perspectiva da análise de discurso, o que deixa de fora muita da riqueza das interacções que se prendem com o contexto em que se desenvolvem. Por outro lado a situação analisada é de um par de alunas num contexto extra sala de aula, o que deixa de fora, por exemplo, o papel do professor.

Também em Portugal se tem vindo a desenvolver algum trabalho sobre interacções sociais e aprendizagem da Matemática. Este foi mesmo o tema do Encontro de Investigação em Educação Matemática promovido pela Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, em 1999. Entre os diversos estudos começo por referir o que tem vindo a ser desenvolvido pelo grupo liderado por Margarida César (César, 2000a, 2000b), desde há alguns anos: um projecto de investigação em que procuram analisar o papel das interacções sociais nos desempenhos de Matemática dos alunos (do 6º ao 12º anos de escolaridade). César identifica como importantes no desempenho matemático dos alunos, para além das tarefas, factores como as instruções de trabalho, o estatuto dos pares, ou o estatuto de quem apresenta a tarefa.

Os resultados dos estudos que tem desenvolvido levam-na a afirmar que:

> *As interacções entre pares revelaram potencialidades superiores às que inicialmente se previam: não só se observam progressos para os alunos que interagem com um par mais competente (colega ou professor), mas também o par mais competente surge beneficiado pelo facto de interagir com o par menos competente, pois o próprio processo interactivo permite uma co-construção de saberes* (César, 2000a, p.7).

Também Margarida Rodrigues (Rodrigues, 1997), num estudo que desenvolveu, em que um dos objectivos era caracterizar a forma como os alunos do 8º ano aprendem Matemática (mais precisamente Geometria), num contexto escolar, utilizando o computador como instrumento mediador, chegou ao mesmo tipo de conclusões. Rodrigues afirma que os alunos que nos subgrupos manifestaram um nível de competência superior, também progridem por interacção com os seus colegas de grupo, uma vez que clarificam as suas ideias através quer do confronto com os colegas, quer pela explicitação das suas ideias.

Quanto à natureza das tarefas, César (2000 a) afirma que é quando os alunos trabalham em díade em tarefas 'não-habituais' que mais progridem nos desempenhos matemáticos, na implementação de uma auto-estima positiva e na adopção de atitudes positivas face à matemática. Mas para César a natureza das tarefas não pode ser vista desligada das instruções de trabalho que são dadas aos alunos. Assim "um instrumento e uma tarefa valem consoante o modo como se utilizam, o clima de sala de aula que existe, o contrato didáctico que rege aquela relação didáctica" (p. 33). Mas para criar um ambiente de sala de aula em que os alunos se sintam suficientemente confiantes e estimulados, é necessário alterar o contrato didáctico, nomeadamente explicitando algumas regras, nomeadamente, os alunos devem ajudar-se mutuamente, devem formular conjecturas e testá-las, devem saber explicar aos colegas o que pensaram e como resolveram as tarefas que lhe foram propostas, devem pôr questões aos colegas que estão a explicar as resoluções que fizeram sempre que não as tenham percebido. Neste novo contrato didáctico responder ao acaso, só para ver se acertam, já não compensa pois é sempre necessário explicar como se pensou. Assim, o que muda em termos de regras explícitas e implícitas é fundamental para explicar as mudanças de atitude dos alunos face à Matemática.

Segundo Margarida César (2000a) mudar o contrato didáctico constitui também um desafio para o professor. O professor passa de um expositor do saber a um orientador de alunos que constroem o seu saber através das actividades que ele lhes propõe, das questões pertinentes que lhes coloca, dos desafios que lhes lança. É necessário que o professor conheça muito melhor as potencialidades dos seus alunos para ser capaz de trabalhar na zona de desenvolvimento proximal (Vygotsky, 1978) de cada um deles, actualizando as potencialidades que possuem. Assim só aparentemente o papel do professor se torna menos relevante.

Para esta autora "a interacção entre pares favorece a acomodação, pelo que os benefícios que dela resultam para os alunos são estáveis no tempo ou seja, não se perdem quando eles voltam a trabalhar individualmente, nem quando são confrontados com tarefas do mesmo tipo passado algum tempo" (p. 33-34). Uma vez que não se aprende no vazio social e os saberes são contextualizados, o papel do professor e dos alunos torna-se muito mais complexo e multifacetado. César afirma ainda, que o seu estudo veio de algum modo confirmar o já obtido em outros estudos, quando, para além das sessões com interacção era implementada uma discussão geral final, os resultados obtidos eram mais acentuados do que se essa mesma discussão não tivesse existido. Esta ideia também é defendida por Sierspinka (1994) quando afirma que:

> *Acredita-se usualmente que as actividades comunicativas alargam a compreensão dos alunos. Os alunos parecem compreender melhor se trabalham em grupos, participam em discussões, onde têm de verbalizar as suas compreensões, onde as suas compreensões são confrontadas com outras compreensões de outros alunos e onde, ao defenderem os seus pontos de vista, têm de se envolver em validações e justificações que os fazem ver melhor se as suas compreensões são consistentes e fazem sentido* (p.66).

No trabalho descrito por Cobo e Fortuny as duas alunas foram observadas fora do contexto de sala de aula, sem interferência de qualquer adulto (professor ou observador), a sua actuação é registada através de uma câmara de vídeo. Não é explícito qual o contrato didáctico estabelecido, nem qual o contexto em que a tarefa foi proposta às duas alunas nem é claro como estas a consideraram e qual a sua atitude perante a Matemática e a sua aprendizagem. No entanto, os resultados do estudo estão de acordo com os obtidos por Rodrigues (1997) que conclui que os alunos progridem e aprendem em interacção social quer quando recebem um suporte dos outros, quer quando não recebem qualquer suporte (uma vez que pelo facto de interagirem uns com os outros, clarificam as suas próprias ideias). Um outro aspecto que não é referido por Fortuny e Cobo são os critérios de constituição do par para interagir. César (2000a) refere-se à necessidade de haver critérios para a constituição dos pares, pois para que esta forma de trabalho resulte é necessário que as interacções entre pares facilitem o aparecimento de conflito socio-cognitivo e que os dois elementos da díade consigam trabalhar na zona proximal de desenvolvimento um do outro.

Como já foi referido, a relação entre o estudo descrito, que é claramente o estudo da interacção entre duas alunas quando tentam resolver problemas de geometria e os outros projectos enunciados por Cobo e Fortuny, que usam a comunicação à distância, parece estar relacionada com o facto de a interacção estudada estar focalizada na comunicação/análise discursiva. Não é descrito que tipo de organização está prevista, nem qual a interacção a estabelecer com outros colegas, professores ou tutores, o que torna difícil qualquer consideração mais detalhada sobre os subprojectos enunciados.

REFERÊNCIAS

Bishop, A. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Bruner, J.S. y Bornstein, M.H. (1989). "On interaction". En Bruner & Bornstein (eds.) *Interaction in Human Development.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

César, M. (2000a). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos. In J. P. Ponte e L. Serrazina (Org.), *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália: Actas da Escola de Verão – 1999.* Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

César, M. (2000b). Interacções na aula de Matemática: Um percurso de 20 anos de investigação e reflexão. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro; J. P. Ponte, J. M. Matos e L. Menezes (Org.). *Interacções na aula de Matemática*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação: Secção de Educação e Matemática.

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small group interaction: Four case studies. In P. Cobb e H. Bauersfeld (Edts.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. e Bauersfeld, H. (Edts.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Um estudio de casos.* Tesis. Universidade Autónoma de Barcelona (não publicada).

Cole, M. (1996). *Cultural Psychology: A one and future discipline.* Harvard University Press.

Fortuny, J. M.; Ramón, J. M.; Olarte, J. F. M. e Carpintero, D. T. (2000). Aprendizaje sin límites: Un modelo de diseño interactivo como soporte y ampliación instruccional en la enseñanza de la geometría en la ESO. In J. P. Ponte e L. Serrazina (Org.), *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália: Actas da Escola de Verão – 1999.* Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade.

Rodrigues, M. (1997). *A aprendizagem da Matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador* (Tese de Mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and Society: The development of higher pshychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Segundo Seminario

Pensamiento numérico y algebraico

Coordinadores
Dr. Martín Socas Robaina, y J.A. García Cruz,
Universidad de La Laguna

Ponencia 1
Algunas investigaciones sobre la enseñanza
de los números negativos
Dra. Alicia Bruno
Universidad de la Laguna

Ponencia 2
La Investigación en Educación Matemática en la
Universidad de Málaga: Estructura y Fundamentos
Dr. José Luis González Marí y Dr. Alfonso Ortiz Comas
Universidad de Málaga

Ponencia 3
Investigación en razonamiento inductivo
numérico y algebraico
Dr. Alfonso Ortiz Comas y Dr. José Luis González Marí
Universidad de Málaga

ALGUNAS INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

ALICIA BRUNO
Universidad de La Laguna

RESUMEN

En esta exposición se ofrece inicialmente una síntesis de las principales investigaciones realizadas sobre Pensamiento Numérico y Algebraico en la Universidad de La Laguna, y, posteriormente, se presentan dos investigaciones realizadas sobre la enseñanza-aprendizaje de los números negativos. Estas últimas investigaciones han abarcado diferentes objetivos, de los que se enfatizarán los resultados sobre la resolución de problemas aditivos, en concreto los procedimientos de resolución de los problemas por parte de estudiantes de secundaria y el estudio de dos métodos de enseñanza de estos problemas.

1. INVESTIGACIONES EN PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO EN LA UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA (ÁREA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS)

En Universidad de La Laguna se han desarrollado distintas investigaciones relacionadas con el Pensamiento Numérico y Algebraico: resolución de problemas aritméticos verbales, adquisición del lenguaje algebraico, resolución de problemas mal definidos, procesos de generalización y números negativos. Estas investigaciones han culminado, o culminarán en breve, en tesis doctorales. A continuación comentamos brevemente cada una de ellas, excepto la última, que corresponde a la segunda parte de esta exposición.

La investigación sobre la *resolución de problemas aritméticos verbales*, desarrollada por la profesora J. Hernández, bajo la dirección de M. Socas, ha tenido como objetivo el análisis de las habilidades de alumnos de primaria en la resolución de problemas aritméticos verbales, cuando son instruidos en un modelo de competencias que usa dos sistemas de representación yuxtapuestos. Además, se han estudiado las actitudes que tienen los alumnos hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas, estudiando también la implicación del profesorado en la instrucción y en la propia investigación. Los resultados de esta investigación se recogen en la tesis doctoral de Hernández (1997).

La *adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años* constituye la tesis de la profesora M. Palarea (1999), dirigida por M. Socas. Señalamos sus objetivos principales: estudio de las habilidades cognitivas de carácter operacional y de carácter conceptual más relevantes del pensamiento algebraico, con alumnos de 12 a 14 años; estudio del uso y comprensión de los registros y sistemas de representación autosuficientes; elaboración de un test que considere todos los elementos implicados en el tránsito desde el pensamiento aritmético al algebraico desde una propuesta curricular “global”; estudio de aspectos afectivos de los alumnos con relación a las Matemáticas en general y al Álgebra en particular; estudio y organización de dificultades, obstáculos y errores que se dan en el lenguaje algebraico; elaboración de una propuesta curricular que facilite el inicio del aprendizaje del Álgebra.

La *resolución de problemas mal definidos* (problemas en los que sobran o faltan datos) es la investigación en la que trabaja A. Noda (bajo la dirección de J. Hernández y M. Socas), y corresponde al desarrollo del proyecto de su tesis doctoral. La intención principal de este trabajo es construir un modelo de competencia formal para problemas de encontrar, bien y mal definidos, que permita analizar los comportamientos de los resolutores en la fase de “preparación”, es decir, estudiar cómo identifican los resolutores las situaciones problema en términos de bien y mal definidos, cómo las caracterizan, cómo establecen relaciones entre los datos y el objetivo en este tipo de situaciones, etc., con el objetivo de ver la existencia, o no, de comportamientos regulares (invariantes) de los resolutores. Además, se estudian las justificaciones que utilizan los alumnos para validar o refutar un problema de encontrar, bien o mal definido (Noda et al., 1999).

El profesor J.A. García Cruz (1998) realizó su tesis doctoral sobre *procesos de generalización* desarrollados por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal (bajo la dirección de A. Martinón). Los aspectos que han tratado en su investigación son los siguientes: acciones y esquemas de la acción mediadores del proceso; invariantes establecidos por los alumnos; caracterización de la noción de estrategia empleada, así como sus particularidades: visual, numérica y mixta; una primera aproximación al esquema de descomposición genética de la estructura conceptual de pauta lineal; caracterización de los tres niveles constituyentes; modos de argumentar sobre soluciones a problemas de generalización lineal empleados por los alumnos; descripción de un proceso de enseñanza basado en el uso de normas sociales y sociomatemáticas de interacción en el aula; y, por último, sugerencias para el tratamiento en clase del tema, así como de pautas cuadráticas.

2. ALGUNAS INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA–APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Presentamos ahora dos investigaciones que tienen como núcleo común la enseñanza–aprendizaje de los números negativos. No se hablará de una única metodología, aunque las investigaciones tienen, evidentemente, antecedentes comunes. La primera investigación forma parte de la tesis doctoral *La enseñanza de los números negativos desde una perspectiva unitaria* (Bruno, 1997); la segunda investigación trata sobre métodos de enseñanza de la resolución de problemas aditivos con números negativos.

2.1 LOS NÚMEROS NEGATIVOS DESDE UNA PERSPECTIVA UNITARIA

En el momento de iniciar nuestra investigación sobre la enseñanza–aprendizaje de los números negativos, hace aproximadamente diez años, los trabajos que encontramos publicados sobre el tema respondían a intereses distintos. Sin hacer una clasificación exhaustiva, se puede decir que un amplio grupo de publicaciones mostraban modelos (muchos de ellos gráficos o manipulativos) en los que apoyarse para ayudar a los estudiantes a comprender las reglas operatorias de los números negativos. Algunos de estos trabajos, estaban acompañados de estudios empíricos en los que se contrastaba la efectividad de algunos modelos (Liebeck, 1990; Lytle, 1994). Otro grupo de investigaciones tenía un corte histórico–epistemológico (Glaeser, 1981; Schubring, 1986). Y un tercer grupo informa sobre cómo estudiantes de primaria y secundaria resuelven problemas aditivos con números negativos, entre los que destacamos los de Bell (1986), Vergnaud y Durand (1976) y Vergnaud (1982).

A partir del primer análisis de estos trabajos concluimos que la mayoría de ellos se refieren a la introducción de Z, es decir, se preocupan de la extensión de los números enteros no negativos Z_+ al sistema de los enteros Z. Además, con el fin de hacer esta extensión más comprensiva, se propone recurrir a modelos en los que apoyar la enseñanza, que en general son válidos para Z, pero no para otra clase de números.

Dado que muchos estudiantes manifiestan un conocimiento no integrado de los distintos sistemas numéricos (Robinet, 1986), nos planteamos la necesidad de contemplar la enseñanza de los números negativos integrada en un único conocimiento numérico, lo que hemos denominado *perspectiva unitaria del conocimiento numérico* y que se explica brevemente en el apartado siguiente.

2.1.1 *Una perspectiva unitaria*

Planteamos que la enseñanza de los números debe contemplarse dentro de un marco que denominamos perspectiva unitaria del conocimiento numérico. La idea es que lo que se aprende acerca de los números a lo largo de la escolaridad debe ir conformando un único conocimiento numérico, que debe tener un hilo conductor que lo unifique, de forma que los alumnos realicen las extensiones de los conjuntos numéricos, integrando y conectando el nuevo conocimiento con lo que ya conocen sobre los números. Ello implica que la enseñanza debe poner énfasis en ciertos elementos que ayuden a esta unificación. Así, se hace necesario utilizar situaciones numéricas, representaciones gráficas, modelos, propiedades numéricas, etc., que permitan a los alumnos establecer las conexiones entre las distintas clases de números.

Alrededor del concepto de número hay un conjunto de ideas que tienen distintas manifestaciones: lo operativo y abstracto, las situaciones concretas y las representaciones gráficas, entre las que existen múltiples relaciones. La noción de *campo conceptual* (Vergnaud, 1990) nos resultó útil como marco en el que explicar estas ideas. Se entiende como *campo conceptual* al conjunto formado por las situaciones que se corresponden con una idea, así como por los conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas. Así, Vergnaud habla de *campo conceptual aditivo* o *campo conceptual multiplicativo*. Sin embargo, el conocimiento numérico es más amplio, en cierta forma se sitúa en el *campo conceptual numérico* (González, 1995).

Para reflexionar sobre los elementos del campo conceptual que rodean al concepto de número, distinguimos entre tres *dimensiones* del conocimiento numérico (ideas adaptadas de los trabajos de Sasaki, 1993 y Peled, 1981). (1) La *dimensión abstracta* (conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas y a las formas de escritura de los números); (2) la *dimensión de recta* (representación de los números sobre una recta, basada en la identificación de los números reales con los puntos de la recta y con vectores en la misma); (3) la *dimensión contextual* (aplicaciones, situaciones concretas en las que se usan los números). El *conocimiento numérico* abarca, no sólo lo relativo a cada una de las tres dimensiones, sino también a las transferencias entre ellas.

El inicio del aprendizaje numérico se produce en el sistema de los números enteros no negativos y concluye con el de los números reales. Varios son los caminos posibles a recorrer; es decir, varias son las *secuencias de extensiones* que podrían realizarse:

$$\begin{tikzcd} Z_+ \arrow[r] \arrow[d] & Q_+ \arrow[r] \arrow[d] & R_+ \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Q \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

Pensamos que seguir secuencias de extensiones que avancen hacia R sin retrocesos facilita el conseguir una perspectiva unitaria del conocimiento numérico. Además, en el momento de realizar las ampliaciones numéricas se debe enfatizar los aspectos que son comunes a los distintos sistemas numéricos, y ello en cada dimensión, ya que contribuiría a configurar una visión unitaria de los números.

La incorporación de los números negativos supone dar un paso en las secuencias de extensiones que puede hacerse de Z_+ a Z, de Q_+ a Q, o de R_+ a R. En la dimensión abstracta, lo más relevante de esta extensión es que en el sistema ampliado todo número a tiene un opuesto -a, de modo que a – b = a

+ (-b) y a + b =a - (-b), es decir, las nociones de suma y resta se identifican mediante el uso de la noción de opuesto de un número: restar b es sumar –b, el opuesto de b.

En la dimensión de recta esta ampliación tiene un significado simple: los números conocidos (los positivos) se representan a la derecha del 0 y los nuevos números son sus simétricos respecto de 0 a la izquierda.

En la dimensión contextual se producen las mayores dificultades. Las ideas de suma y resta en los números positivos tienen significados contrarios: sumar es añadir, unir..., mientras que restar es quitar, separar... Con los negativos deben identificarse tales significados, de modo que sumar y restar se correspondan con la misma idea. Es por ello que la resolución de problemas aditivos juega un papel fundamental en la enseñanza en el momento de realizar la extensión.

Al comenzar la investigación no encontramos ningún antecedente que analizase la posibilidad de realizar secuencias de enseñanza que "avancen hacia R". Con respecto al uso de la recta, las investigaciones realizadas con números positivos indicaban algunas dificultades que tenían los alumnos para representar operaciones aditivas abstractas. También algunas investigaciones la estudiaban como modelo para introducir los números negativos, sin embargo, no encontramos trabajos que analizaran su papel en la enseñanza de los negativos relacionándola con las otras dimensiones. En cuanto a las investigaciones en la dimensión contextual, utilizamos principalmente los trabajos sobre problemas aditivos con números negativos de Vergnaud (1981), Conne (1985) y Bell (1986). En ellos se trataba aspectos relacionados con las tres dimensiones y nos sirvieron de base para analizar la resolución de problemas aditivos, y para realizar una clasificación de problemas aditivos (Bruno y Martinón, 1997).

2.1.2 *Objetivos de la investigación*

A partir de las reflexiones anteriores, se perfilaron los objetivos de investigación que se concretan a continuación:

Objetivo 1. Secuencia de extensiones. De las posibles maneras de introducir los números negativos, se optó por: Q_+ Æ Q. Se planteó averiguar si tal extensión producía en los alumnos un peor conocimiento de los números enteros que el que adquieren los alumnos que siguieron la extensión Z_+ÆZ.

Objetivo 2. Contextos. Estudio de los contextos en cuanto a la dificultad de las actividades, especialmente en las correspondientes a problemas aditivos.

Objetivo 3. Estructuras. Análisis del conocimiento de los alumnos sobre aspectos *funcionales* de los números: uso y representación de los *estados*, *variaciones* y *comparaciones*.

Objetivo 4. Identificación de la suma y la resta. Se trató de conocer de qué forma lograban los alumnos la identificación entre las dos operaciones, no sólo en la dimensión abstracta, sino principalmente en la contextual.

Objetivo 5. Resolución de problemas aditivos. Estudio de cómo influyen el contexto, la estructura y el dato desconocido en la resolución de estos problemas.

Objetivo 6. La recta. Análisis del uso de la recta cuando se trabaja con números

negativos, haciendo uso de la representación puntual y de la vectorial, especialmente en la resolución de problemas.
*Objetivo 7. Relación entre las dimensiones.*Estudio de los procesos de transferencia entre las tres dimensiones.

2.1.3 *Metodología, diseño y fases de la investigación*

Las cuestiones de investigación requerían una intervención directa en el aula, ya que su análisis no se podía realizar con alumnos que hubiesen aprendido los números negativos siguiendo una secuencia de aprendizaje tradicional en España, por lo que se realizó un trabajo de *campo*. Se elaboró un material curricular que seguirían los alumnos y que reunía las condiciones para poder analizar los objetivos de investigación. El método de análisis de datos que se siguió fue cualitativo.

A continuación presentamos de forma esquemática las fases de la investigación:

PRIMERA FASE

· *Planteamiento de las cuestiones de investigación.* Planteamiento inicial de seis de los objetivos de investigación: Objetivos 1, 2, 3, 5, 6 y 7.
· *Elaboración de un material curricular.* Se elaboró un material curricular a seguir por los alumnos y que recogía las características de los números negativos que permitían responder a las cuestiones a investigar.
· *Primera experiencia en el aula.* Realizamos una primera experiencia que se desarrolló durante dos meses con 5 grupos de séptimo de E.G.B., de 12-13 años de edad, pertenecientes a dos escuelas, durante el curso 1992-93. De los grupos participantes en la experiencia, 4 grupos siguieron el material curricular elaborado por nosotros y el otro grupo sirvió como grupo de *referencia*. A lo largo de esta experiencia, los alumnos respondieron a distintas pruebas escritas. Además, los profesores de los grupos realizaron observaciones en el aula.
· *Entrevistas.* Una vez terminada la experiencia seleccionamos 5 alumnos a los que realizamos entrevistas grabadas en vídeo.
· *Análisis de los datos*. Los datos de las pruebas y las entrevistas se analizaron en función de las cuestiones de investigación.
· *Resultados y nuevas cuestiones de investigación.* Los resultados mostraron la necesidad de profundizar en el planteamiento de la suma y la resta, a partir de ahí, surgió el objetivo de investigación 4: identificación de la suma y la resta. Además, se observó la necesidad de profundizar en el objetivo 7 y de ratificar algunas conclusiones.

SEGUNDA FASE

· *Revisión del material curricular*. Se revisa y modifica el material curricular en función de los resultados de la experiencia.
· *Segunda experiencia.* Se realiza una segunda experiencia en el aula durante el curso 1993-94 durante dos meses. Se plantearon todas las cuestiones de investigación. En este caso, participaron 5 grupos, 3 de ellos siguieron el material curricular y 2 sirvieron como grupos de referencia. Los grupos pertenecían a 3 colegios distintos. De nuevo, a lo largo de la experiencia se realizaron pruebas escritas y los profesores realizaron observaciones de aula.

· *Entrevistas.* Una vez finalizada la experiencia en el aula, se seleccionó a 11 alumnos pertenecientes a los 3 grupos que siguieron el material curricular, a los que se realizó entrevistas sobre los objetivos de investigación.
· *Análisis de los datos*. Se realizó un estudio descriptivo de las pruebas y se analizaron las entrevistas en función de las cuestiones de investigación.
· *Conclusiones de investigación.* Una vez finalizado el análisis de los datos se plantearon las conclusiones de la investigación.

Dadas las limitaciones de la exposición, exponemos las conclusiones relativas a la resolución de problemas aditivos. Las restantes conclusiones se recogen ampliamente en Bruno y Martinón (1996, 1999) y Bruno (1997).

2.1.4 *Resolución de problemas aditivos*

Nuestras principales aportaciones se centran en haber analizado problemas aditivos en contextos diferentes a los que ya se habían tratado en la literatura, como *nivel del mar, carretera, ascensor*, *cronología* y haberlo hecho conociendo cómo los alumnos aprendieron los números negativos. Además, hemos analizado el papel de la recta en la resolución de problemas y su influencia en la comprensión y en los planteamientos de las operaciones abstractas con números negativos, asunto del que se tenía poca información. También hemos seguido los pasos que los alumnos dan para llegar a la solución de los problemas, de forma que podemos dar razones de algunos de los errores en estos problemas y dónde está la principal dificultad de los mismos. Por último, establecimos una agrupación de los alumnos según los procedimientos de resolución de los problemas que emplean.

Sobre los problemas aditivos se concluye que la dificultad está determinada por la posición de la incógnita más que por el contexto y por la estructura. Por otro lado, el uso de la recta depende más del contexto que de la estructura o de la posición de la incógnita.

Las entrevistas realizadas a los estudiantes mostraron que la forma de llegar a la solución del problema cambia según los alumnos y la comprensión que posean de las operaciones de suma y resta. Se observaron tendencias en los alumnos a utilizar la recta, o no, y en estas tendencias no parecía influir el nivel de conocimiento de los alumnos.

Encontramos tres procedimientos de resolución de los problemas, que hemos denominado (1) *orden de los datos,* (2) *adaptar la operación a la recta* y (3) *usar números positivos*, los cuales comentamos a continuación.

- Orden de los datos

Cuando los alumnos resuelven los problemas con una operación, en muchas ocasiones escriben los números siguiendo el mismo orden en que aparecen en el enunciado del problema y con los signos que indican las situaciones. Por ejemplo, ante el problema *Juan tiene en su casa 10 pesetas y debe a un amigo 15 pesetas, ¿cuál es su situación económica*?, plantean, la operación 10-15. Seguir este procedimiento en todos los problemas indica una ausencia de comprensión de las diferencias entre las estructuras de los problemas.

- Adaptar la operación a la recta

En este caso, el alumno primero resuelve el problema en la recta, y a continuación busca una operación cuyo resultado coincida con el obtenido previamente en la recta. En ocasiones, realiza varios intentos antes de conseguir la operación adecuada.

Esta forma de actuar se produjo, especialmente, en aquellos problemas en los que los alumnos no veían la operación inmediatamente.

Este tipo de comportamiento muestra que los alumnos tienen más seguridad en los resultados que obtienen en la recta que el que encuentran con la operación. Asimismo, indica la dificultad para dar sentido a las operaciones con números negativos.

- Usar números positivos

Algunos alumnos resolvieron los problemas aditivos planteando una operación con números positivos, e interpretando la solución de forma cualitativa, es decir, indicando cómo es el estado, la variación o la comparación. En ocasiones, previamente lo habían resuelto en la recta, o parecían tener una imagen del problema.

Esta forma de resolver los problemas indica que determinados alumnos no ven la necesidad de dar un resultado en el que aparezcan los números negativos, o bien puede ser una forma de evadir la dificultad de poner una operación con números negativos, ya que los alumnos que siguieron este procedimiento plantearon operaciones con números negativos en otros problemas.

El uso o no de estos procedimientos llevó a clasificar a los alumnos entrevistados en tres grupos, que indican distintos niveles de comprensión de los problemas aditivos.

En el estudio de la resolución de problemas se encontraron también otros razonamientos de los alumnos: *cambiar la estructura del problema, llegar al cero, interpretar incorrectamente el resultado* y *representar los números de forma aislada en la recta.*

2.2. Métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos

La anterior investigación realizada dejó abierta algunas cuestiones, entre ellas el cómo mejorar la enseñanza para conseguir que la relación entre la dimensión abstracta y la contextual se establezca de forma correcta al resolver problemas aditivos. Muchos de los alumnos que participaron en la investigación anterior tenían dificultades para plantear una operación correcta con números negativos y algunos de ellos recurrían a la recta como medio para dar una respuesta. También se comprobó que el tipo de estructura influye en el éxito de la resolución, sin embargo, la posición de la incógnita es el factor que presenta más dificultades para los alumnos. Por lo tanto, esto es un indicador de que la enseñanza de los problemas aditivos debe incidir sobre la estructura de los problemas y sobre la posición de la incógnita.

Nos planteamos entonces profundizar en cómo debía ser el trabajo en el aula para conseguir mejoras en la resolución de problemas aditivos por parte de alumnos de secundaria. La investigación que mostramos ahora tuvo como finalidad analizar dos métodos de enseñanza de los problemas aditivos con números negativos.

Rudnitsky *et al.* (1995) realizaron una investigación con problemas aditivos de números positivos en la que analizaban y contrastaban la efectividad de tres métodos de enseñanza. (1) *Método resolver*: los alumnos realizaron prácticas continuas y sistemáticas de resolución de problemas aditivos con números positivos, con distintas estructuras y variando la posición de la incógnita. (2) *Método redactar*: los alumnos redactaron los problemas que posteriormente aprendieron a clasificar según sus estructuras, los intercambiaban con sus compañeros para resolverlos, y en ocasiones se les pedía escribir los tres problemas de una misma estructura, correspondientes a cada una de las posiciones de la incógnita. (3) M*étodo control*: metodología *tradicional*, sobre la que no ejercieron ninguna influencia, en la que la resolución de problemas aditivos ocupó la práctica habitual de los profesores participantes. Los resultados indicaron que los alumnos que siguieron el método de *redactar* obtuvieron mejores resultados a largo plazo que los alumnos de los otros métodos.

Nos planteamos si una conclusión similar se podía establecer para los números negativos, es decir, si una metodología de enseñanza de los números negativos en la que los alumnos escriben los problemas aditivos y los clasifican según sus estructuras, lleva a un mayor éxito en la resolución de los mimos. Por ello, realizamos una investigación que en su base coincide con la de Rudnitsky *et al.*, aunque con algunas diferencias. También nos interesó analizar qué tipo de problemas escribían los alumnos en el método *redactar*, con el objetivo de ampliar la información sobre la forma en que los alumnos entienden estos problemas.

La investigación se realizó con alumnos de segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria (de 13-14 años de edad). Participaron 9 grupos de alumnos, de tres colegios diferentes; en la tabla 1 se resume la información referente al método de enseñanza utilizado, número de grupos, alumnos, profesores y colegios participantes.

Método de enseñanza	Redactar			Resolver			Control		
Grupos	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Nº de alumnos por método	57			74			55		
Nº de alumnos por grupo	17	17	23	30	22	22	19	20	16
Profesores	P1	P1	P2	P2	P3	P4	P5	P5	P5
Colegios	C1	C1	C1	C1	C2	C3	C4	C4	C4

Tabla 1. Distribución de los grupos en los métodos

En los métodos *redactar* y *resolver*, la experiencia se desarrolló en 10 horas de matemáticas de su horario habitual (2 horas semanales, durante cinco semanas). El primer día se realizó una prueba *inicial* que contenía 9 problemas aditivos con números negativos y el día 10 una prueba *final* con el mismo número de problemas y con iguales estructuras, aunque con diferentes contextos. Cuatro meses más tarde de la finalización de la experiencia se pasó una prueba de *retención*, del mismo tipo de las dos pruebas anteriores. Los alumnos de los grupos del método *control* siguieron las actividades propuestas por su profesor y su libro de texto, en el cual había problemas aditivos al final del tema. Estos alumnos también resolvieron las pruebas *inicial*, *final* y de *retención*. Por otro lado, en el método *redactar* se recogieron todos los días de clase los problemas escritos por los alumnos.

Con las pruebas escritas se realizó un estudio estadístico descriptivo de las variables de interés para nuestra investigación: dificultad de los problemas y estrategias de resolución; y una ANCOVA para verificar si había diferencias significativas entre los métodos. También se hizo un análisis de tipo cualitativo de los textos de los problemas escritos por los alumnos del método redactar.

Los resultados de esta investigación mostraron que un trabajo sistemático de los problemas aditivos con números negativos, como ha sido el de los métodos *redactar* y *resolver*, produjo mejoras en la resolución de los mismos. Mientras que el método, bastante extendido, de resolver problemas al final del tema, como aplicación de las reglas estudiadas previamente (método *control*), no hizo que los alumnos obtuvieran resultados tan buenos.

Por otro lado, los resultados del método *redactar*, que es el que presenta más novedades en el aula, no fueron tan buenos como los obtenidos por Rudnitsky *et al*. con números positivos. Además, no se ha mostrado más efectivo que el método *resolver*, aunque los resultados están próximos, y sí se ha mostrado mejor que una enseñanza en cierta forma "tradicional". Es por ello que no lo descartamos como una alternativa de enseñanza.

En los tres métodos ha quedado patente que los problemas aditivos de números negativos se resuelven con más facilidad usando una recta o una operación con números positivos, y que es más complejo resolverlos con números negativos. Es decir, que ante un problema aditivo de números negativos, entender la situación y encontrar la solución no siempre va unido a saber expresar formalmente un cálculo con números negativos que lo resuelva.

El método *redactar* es una alternativa de enseñanza, pero necesita más tiempo que otros métodos. Quizás con una metodología prolongada a lo largo de un curso escolar, y no concentrada en un período corto de tiempo, se consigan mejores resultados. Lo que necesitamos profundizar es si con este método se consiguen mejorar otros aspectos importantes para el conocimiento matemático de los estudiantes, entre ellos, reflexionar sobre un enunciado, no responder de forma mecánica o aprender que no todos los problemas son iguales en cuanto a su estructura.

En el análisis de los textos escritos por los alumnos del método *redactar* se tuvo en cuenta, principalmente, cómo clasificaron los problemas respecto a las estructuras, cómo los resolvieron, determinados aspectos lingüísticos y formas de expresar situaciones que pudieran aportar conocimiento sobre la comprensión de las situaciones por parte de los alumnos.

Los resultados indican que los alumnos no tienen dificultad para clasificar los problemas según su estructura. También encontramos que muchas respuestas incorrectas de los problemas no se producen por una falta de comprensión del enunciado, sino que la principal dificultad estriba en asociar la suma o la resta adecuada, y en el caso de la resta, el orden de los términos. Es decir, que falla la relación entre la dimensión contextual y la abstracta, como ya quedó patente con otros métodos de enseñanza en Bruno y Martinón (1996).

La metodología *redactar* ha sido útil para entender determinadas dificultades de algunos alumnos con estos problemas, como en los problemas relativos a la suma/resta de dos cambios sucesivos. La forma de redactar los problemas por parte de los alumnos nos indica muchas veces qué idea tienen de los mismos. La importancia de los aspectos lingüísticos en la resolución de problemas se manifiesta cuando el uso de una palabra con connotaciones negativas les lleva, en ocasiones, a escribir una resta. Incluso cómo determinadas expresiones provocan respuestas erróneas. Un estudio más amplio de estos aspectos se puede encontrar en Bruno (1999).

REFERENCIAS (PARTE 1)

Hernández, J.: 1997, *Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos*, Tesis doctoral, Universidad de La Laguna.

Gracía Cruz, J.A.: 1998, *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*, Tesis doctoral, Universidad de La Laguna.

Noda, A., Hernández, J. y Socas, M.M.: 1999, Study of justifications made by students at the "preparation stage" of badly defined problems, *Proceedings of the XXIII Conference PME*. Israel.

Palarea, M.: 1999, *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en el álgebra cometidos por alumnos de 12 a 14 años*, Tesis doctoral, Universidad de La Laguna.

REFERENCIAS (PARTE 2)

Bell, A.: 1986, 'Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros', *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208.

Bruno, A., Martinón, A.: 1996, 'Les nombres négatifs dans l'abstrait, dans le contexte et sur la droite', *Petit x*, 42, 59-78.

Bruno, A., Martinón, A.: 1997, 'Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos', *Educación Matemática*, 9 (1), 33-46.

Bruno, A., Martinón, A.: 1999, 'The teaching of numerical extension: the case of negative numbers', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(6), 789-809.

Bruno, A.: 1997, *La enseñanza de los números negativos desde una perspectiva unitaria*, Tesis doctoral, Universidad de La Laguna.

Bruno, A.: 1999, 'Escribiendo problemas: una experiencia con números negativos', *Actas de las IX Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas*, CEFECOP de Lugo, Lugo, pp. 352-354.

Conne, F.: 1985, 'Calculs numériques et calculs relationnels dans la resolution de problèmes d'arithmetique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5, 3, 269-332.
Glaeser, G.: 1981, 'Epistemologie des nombres relatifs', *Recherches en Didáctique des mathématiques*, 2(3), 303-346.
González, J.L. y otros: 1990, *Números enteros*, Síntesis, Madrid.
González, J.L.: 1995, *Los números enteros relativos*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
Liebeck, P.: 1990, 'Scores and forfeits - an intuitive model for integer arihmetic?', *Educational Studies in Mathematics*, 21, 221-239.
Lytle, P.: 1994, 'Investigation of a model on neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction', *Proceedings of the XVIII PME*, Lisbon., 192-199.
Peled, I.: 1991, 'Levels of knowledge about signed numbers', *Proceedings of the XV PME*, pp. 145-152.
Robinet, J.: 1986, 'Les réels: quels modèles en ont les élèves?', *Educational Studies in Mathematics*, 17, 359-386.
Rudnitsky, A., Etheredge, S., Freeman, J.M., Gilbert, T.: 1995, 'Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach', *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (5) 467-486.
Sasaki :1993, 'The constructing meanings by social interaction in mathematical teaching', *Proceedings of the XVII PME*, 2, University of Tsukuba, Japón, pp. 262-268.
Schubring, G.: 1986, 'Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs', *Petit x*, 12, 5-32.
Vergnaud, G.: 1982, 'A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, T., Moser, J, Romberg, T. (eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, LEA, New Jersey.
Vergnaud, G.: 1990, 'La théorie des champs conceptuels', *Recherches en Didactique de Mathémtiques*, 10, 2-3, 133-170.
Vergnaud, G., Durand, C.: 1976, 'Structures additives et complexité psychogénétique', *La Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.

La investigación en educación matemática en la universidad de málaga: Estructura y fundamentos

José Luis González Marí
Alfonso Ortiz Comas
Universidad de Málaga

RESUMEN

La investigación en Educación Matemática necesita cada vez más de estrechas y prolongadas colaboraciones entre personas, grupos e instituciones. El estado de los conocimientos y de las relaciones entre la teoría y la práctica así como las características de los fenómenos y de la propia investigación demandan el desarrollo de procesos conjuntos, planes coordinados y tareas interconectadas en las que se aborden, de manera progresiva, aproximaciones teóricas y empíricas cada vez más evolucionadas en torno a problemas o campos de problemas muy específicos y estrechamente relacionados, es decir, procesos, planes, tareas y aproximaciones generadas y desarrolladas en el seno de líneas o tendencias de investigación sólidas, bien delimitadas y con una cierta continuidad. Ésta es la orientación que se quiere dar a la investigación en el Área de Didáctica de la Matemática de la UMA, siendo el propósito del presente documento el de compartir la corta pero intensa experiencia acumulada, dar a conocer y someter a crítica la estructura y los fundamentos de las tareas que se vienen realizando y suscitar un debate sobre el concepto de línea de investigación[1] en Didáctica de la Matemática.

1. Entendida aquí como camino o proceso y, a la vez, como referencia o marco en el que situar y relacionar entre sí los trabajos puntuales y en el que justificar el planteamiento general que da sentido al proceso.

1. TOMANDO REFERENCIAS Y AUNANDO ESFUERZOS

El proceso de investigación reglada en el Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga se inició a partir de las lecturas de dos tesis doctorales en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (González, 1995; Ortiz, 1997). La primera de ellas tuvo una larga trayectoria, pues comenzó en 1988 con ocasión de un estudio general sobre números enteros (González y otros, 1990). En la fase final de la investigación, las indagaciones sobre aspectos históricos, epistemológicos y fenomenológicos llevaron a consideraciones sobre la medida, la cantidad y el número, el paso de la aritmética al álgebra, la ampliación de los conjuntos numéricos y las relaciones entre la construcción formal de los enteros, la comparación, el orden y la metrización de magnitudes. El traslado de esta información al ámbito cognitivo y didáctico permitió: a) detectar la existencia de un campo de nociones métricas y numéricas (números naturales relativos), estructural, cognitiva y didácticamente diferentes a las naturales y enteras, b) elaborar una nueva organización didáctica para el campo conceptual aditivo (González, 1999) y c) abrir nuevas perspectivas a los estudios sobre números enteros, el paso de N a Z y de la aritmética al álgebra.

El segundo de los estudios (Ortiz, 1997) se inició con una investigación sobre razonamiento inductivo numérico en escolares de 9 a 12 años ante tareas de continuación de series de números naturales (Ortiz, 1993). Después de indagar en la historia y epistemología de la inducción y de las series numéricas, se realiza una revisión crítica de tareas inductivas con números naturales en libros de texto y se desarrolla un análisis exhaustivo de las tareas de continuación de series. A partir de aquí, teniendo en cuenta consideraciones de carácter cognitivo, se construye un modelo teórico de razonamiento inductivo numérico para el rango de edades de Educación Primaria, se confirma empíricamente la bondad del modelo, se obtiene una escala acumulativa y se realiza una indagación cualitativa para confirmar las regularidades y profundizar en sus causas.

Las dos investigaciones anteriores, aparentemente dispares, se vieron involucradas en un proceso común que empezó a tomar consistencia con el primer Programa de Tercer Ciclo (bienio 96-98) de la Universidad de Málaga[2] y con los primeros estudios de un Proyecto de investigación subvencionado[3] en los que ya se establecieron las características básicas del marco teórico y metodológico actual (González, 1999). La continuación del Proyecto y el desarrollo del segundo Programa de Tercer Ciclo (bienio 98-2000) orientaron de manera definitiva el enfoque actual de la investigación, reforzando los planteamientos, acercando posiciones, estableciendo prioridades, sacando el máximo partido a los antecedentes, situando los estudios ya iniciados en un marco común más amplio, y estableciendo, como consecuencia, una línea-marco general sobre el diagnóstico y la evolución del razonamiento y la comprensión en Aritmética y Álgebra y

2. Programa de Tercer Ciclo: "Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales".

3. Proyecto "Diagnóstico y Evaluación de la comprensión del conocimiento matemático", subvencionado por la Universidad de Málaga (1997) y por la DGES (Ministerio de Educación y Cultura) con la referencia PB97-1066.

dos sublíneas mucho más específicas: Pensamiento Relativo aditivo y Razonamiento Inductivo Numérico y Algebraico; tres vías de trabajo estrechamente relacionadas.

2. ESTRUCTURA ACTUAL DE LA INVESTIGACIÓN: LÍNEAS Y ESTUDIOS PUNTUALES

En el esquema de la figura 1 se incluyen las líneas o tendencias de investigación (general y específicas) así como las relaciones entre ellas y las diferentes investigaciones puntuales actualmente en desarrollo. Como se observa en el esquema, el marco general en el que se sitúa la labor investigadora es una pequeña parte del campo del aprendizaje y la cognición en matemáticas, como es el razonamiento y la comprensión. A su vez, la mayor parte del trabajo se centra en el razonamiento y la comprensión de los alumnos en torno a conocimientos numéricos, aritméticos y algebraicos[4], lo que significa una dedicación exclusiva a una reducida parcela del ámbito de interés del grupo "Pensamiento Numérico y Algebraico". En este marco general se sitúan las tres líneas generales (A, B y C) en las que se agrupan los trabajos en curso, que corresponden a diferentes parcelas de la línea-marco general y de las que estamos especialmente interesados en las dos primeras, y dos sublíneas más específicas (I y II), que a su vez agrupan trabajos en desarrollo que participan de las dos líneas generales A y B y que resultan de la continuación de los dos estudios iniciales. Los trabajos puntuales[5] se citan en el esquema de la figura 2 mediante una expresión reducida del tema o contenido al que se refieren y se ilustran con los colores de las líneas y sublíneas con las que tienen una relación preferente. En el recuadro situado en el extremo inferior se han incluido aquellos estudios que tienen que ver con dos o más líneas, queriendo expresar que en ellos son especialmente significativas las relaciones entre campos diversos.

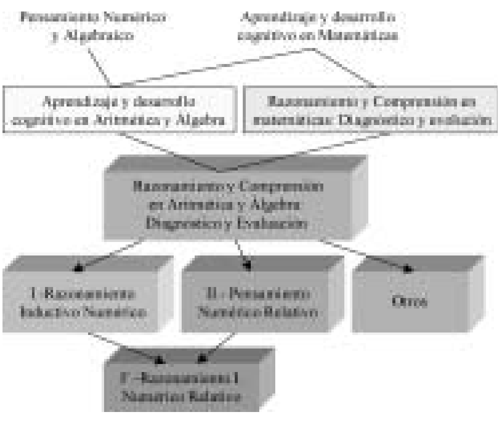

Figura 1.
Marco general y líneas de trabajo

4. Campo que constituye, a su vez, una parte del ámbito de interés del grupo de la SEIEM "Pensamiento Numérico y Algebraico".

5. Estas investigaciones puntuales se tratan con más detenimiento en documentos complementarios.

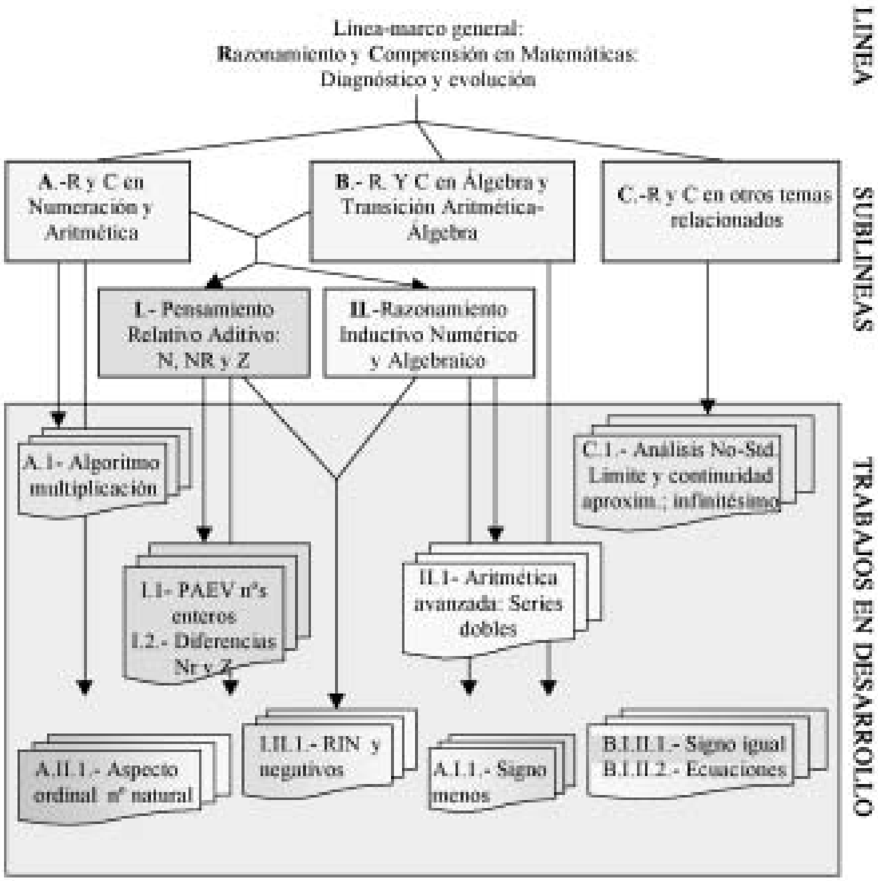

Figura 2.
Lineas de investigación y estudios puntuales actualmente en desarrollo

La línea-marco general se articula en torno a la comprensión del conocimiento matemático y a los medios para diagnosticar y evaluar el razonamiento y la comprensión así como su evolución por niveles y edades. La sublínea “Pensamiento Relativo Aditivo” se sitúa en el campo del razonamiento y la comprensión en torno a la ampliación de los naturales a los enteros y al dominio de aplicación de ambas nociones numéricas; involucra al pensamiento numérico, aritmético y algebraico y atiende también a la “transición de la aritmética al álgebra”. La sublínea “Razonamiento Inductivo Numérico y Algebraico” atiende a los procesos de razonamiento inductivo y sus relaciones con la comprensión del conocimiento aritmético y algebraico. En particular, trata de confirmar la bondad de un modelo evolutivo de Razonamiento Inductivo Numérico, con la consideración de la generalización aritmética y del paso al álgebra y al infinito, ampliar los estudios a otras estructuras numéricas y completar los perfiles de los diferentes niveles de razonamiento inductivo con otros tipos de tareas.

3. APROXIMACIÓN AL MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO EN EL QUE SE DESARROLLAN LOS TRABAJOS

La situación descrita es el resultado de un proceso en el que, junto a las aproximaciones de carácter empírico, se han ido realizando sucesivas reflexiones y aproximaciones teóricas que se han comunicado en anteriores encuentros de la SEIEM (Zamora, Pamplona, Valladolid). En este apartado tratamos de reflejar la situación actual del proceso, comenzando por unas reflexiones informales ligadas a la práctica y continuando por la actualización del planteamiento teórico formal que se expuso en la anterior reunión de la Sociedad.

Algunas dudas, reflexiones y propósitos

Es evidente que la potencialidad de los dos estudios iniciales sólo se puede poner de manifiesto: a) en relación con otros trabajos puntuales y b) con referencia a un marco amplio en el que sea posible tomar distancias y dar una mayor significación a los resultados. Ambos aspectos son importantes: el primero incide en la continuidad y, por tanto, en los propósitos, mientras que el segundo constituye un elemento regulador de la agenda de investigación. Es más, no creemos que sea posible avanzar significativamente si no se realiza ese doble juego de profundización y descentración, de continuación de estudios locales, profundos y específicos, y de indagación sobre los fundamentos, las relaciones y las referencias generales.

Pero este segundo aspecto es siempre problemático, provocando dudas que pueden afectar al desarrollo de los estudios: ¿Qué entendemos por Pensamiento Numérico y Algebraico?; ¿se trata de una línea de investigación o de un conglomerado de estudios que tratamos de relacionar entre sí y utilizar para avanzar?; ¿qué tendría que ocurrir para que pudiéramos hablar con propiedad de una línea de investigación?; ¿se deben separar el pensamiento numérico y el algebraico?; ¿dónde radican las conexiones?; ¿son sólo los contenidos matemáticos los que caracterizan a las investigaciones?; ¿qué introduce en este sentido la palabra "pensamiento"?; ¿hay algo más que números y álgebra?; ¿cuáles son los supuestos implícitos que venimos utilizando de forma reiterada?; ¿existe un marco teórico común o varios?; ¿cuáles son?; ¿es necesario y deseable buscar la unificación?; ¿es necesario y deseable que se confronten las ideas en este sentido?; . . .

En nuestro caso, estamos convencidos de la existencia de regularidades, de la posibilidad de predecir, de la posibilidad de establecer conocimientos científicos en el campo de la Educación Matemática; el problema radica, a nuestro entender, en la observación e interpretación de los fenómenos, cuya solución, si es que existe, requiere al menos de una cierta objetividad, de un espíritu integrador y de una cierta amplitud de miras. Por este motivo, sentimos la necesidad de buscar conexiones e integrar los conocimientos y los diversos modos de interpretar la realidad. Son numerosas las tendencias y las investigaciones puntuales entre las que es difícil identificar aspectos comunes y establecer relaciones significativas si no se observan desde una perspectiva amplia e integradora:

¿Tiene esto que ser así, irremediablemente?; ¿cuáles serían las referencias a tomar en caso contrario? Creemos que la integración es necesaria y previa a la toma de decisiones sobre los problemas, las prioridades, los enfoques y el diseño de los trabajos; en otras palabras, es importante cuidar los aspectos "microscópicos", operativos o técnicos, pero también es necesario cuidar los aspectos "macroscópicos", es decir, la fundamentación, las referencias generales, la efectividad y la relevancia de los resultados. Ello significa disponer de un marco teórico y metodológico específico (González, 1998) en el que se puedan generar modelos cada vez más completos, objetivos y próximos a la realidad, identificar más fácilmente los fenómenos de interés, situar claramente los problemas, justificar las decisiones adoptadas y rentabilizar los resultados. Del mismo modo, al trabajar en una estructura de prioridades y avanzar por medio de líneas de investigación consolidadas, se llegará a utilizar un esquema organizativo propio, un vocabulario común y unos criterios compartidos para evaluar la calidad, lo que debe conducir, probablemente (González, 1999), a un cuerpo de conocimientos ampliamente compartido.

Además del doble juego teórico y empírico y de la intención integradora, creemos que una línea de investigación debe presentar, entre otros, los siguientes aspectos: un interés definido o unos fines claros dentro de una estructura de prioridades, unos objetos o fenómenos a investigar claramente delimitados, un enfoque o marco teórico común, en el que se indiquen la naturaleza de los fenómenos, de la investigación en el campo, los paradigmas en los que se toman referencias, el papel y la importancia de los estudios empíricos o los supuestos de partida, entre otros aspectos, unos antecedentes localizados, una metodología concreta o unas pautas metodológicas comunes a todos los estudios, si bien con una cierta flexibilidad, una uniformidad en cuanto al tipo de estudios, tipos de tareas e instrumentos, una continuidad, una historia, una tradición y una estructura lógica clara y coherente. Entendemos que el trabajo que venimos desarrollando en la Universidad de Málaga cumple una buena parte de los requisitos indicados, de manera que podemos hablar de la existencia de una línea y varias sublíneas de investigación, aunque es cierto que se encuentran en fase de iniciación. En lo que sigue, directamente, así como en el resto del documento, indirectamente, se aportan pruebas y argumentos a favor de las afirmaciones anteriores, que no se han tratado más sistemática y extensamente por falta de tiempo y espacio.

En cuanto a las *prioridades de carácter general de las líneas de investigación,* pensamos que el proceso lógico debe seguir las "fases" ordenadas siguientes, de manera que el paso a una fase debe ir siempre precedido de un cierto detenimiento o consolidación en las fases anteriores. En la actualidad se puede decir que la investigación en la UMA se encuentra desigualmente distribuida entre las tres primeras fases, situación que permanecerá así durante un cierto tiempo hasta que se pueda pasar a indagar en aspectos de la cuarta fase y posteriormente a trabajar simultáneamente en la cuarta y quinta o en la tercera, cuarta y quinta:

1. Fase inicial. Los comienzos no son fáciles ni los logros inmediatos. Echar a andar y trabajar en la dirección de la integración mencionada requiere de

una atención escrupulosa a la *selección y el tratamiento de los antecedentes*, en un sentido amplio (no sólo antecedentes específicos), y a los fundamentos y resultados de las diversas tendencias que han abordado el problema y el área problemática. Es una tarea que hay que realizar antes de decidir qué investigar y cómo hacerlo. Como se indica en González (1999), el interés inicial se ha de centrar en el máximo aprovechamiento de la información disponible y con una cierta consideración hacia teorías, resultados y prácticas de disciplinas afines; siguiendo las pautas del análisis didáctico. La intensidad de trabajo en esta fase es máxima al comienzo de la línea de investigación y debe ir disminuyendo paulatinamente a medida que se avanza en los estudios puntuales; llegará el momento en el que sólo haya que incorporar los últimos resultados para actualizar la información. Del mismo modo, el desarrollo no tiene porqué ser exhaustivo antes de empezar los estudios empíricos; se pueden realizar sucesivos acercamientos en estudios relacionados según un plan de prioridades establecido.

2. *Prioridades y elección del problema*. En este aspecto nos referimos a las prioridades y elección del problema, supuesto determinados los aprendizajes y la dimensión cognitiva individual de los alumnos como áreas básicas y de interés prioritario (opción establecida así como consecuencia de un estudio teórico general previo sobre el campo de la investigación en Educación Matemática). Por tanto, se trata de la elección del problema dentro del campo de *la comprensión, el razonamiento, el aprendizaje y la cognición* en general como núcleos de la indagación a medio y largo plazo. En particular, el interés se centra en el diagnóstico y análisis de la naturaleza, características, niveles y evolución de los aprendizajes y de la comprensión del conocimiento matemático; los errores y las dificultades en los procesos de aprendizaje; las capacidades de razonamiento, su diagnóstico y evolución; los procesos individuales de constitución de los conocimientos así como las semejanzas y diferencias entre individuos diferentes; las representaciones cognitivas y significantes; las relaciones entre las experiencias y la formación de los conceptos; la adquisición de automatismos, procedimientos y destrezas.
3. Averiguar la *situación real* (cognitiva, de aprendizaje, de competencias, etc.) en lo que se refiere al razonamiento y a la comprensión / dominio individual y colectivo de diferentes aspectos del conocimiento matemático. Aquí son importantes: la delimitación precisa del fenómeno a observar (relaciones con otros fenómenos, contaminaciones, etc.); disponer de medios e instrumentos para facilitar la observación y de tareas adecuadas para provocar los comportamientos observables idóneos (validez de los instrumentos, reducción del campo, análisis riguroso de tareas, etc.). - minuciosa justificación de las tareas empleadas o de los criterios de construcción de los instrumentos.
4. Averiguar los factores, las causas y condiciones, tanto externas (socioculturales, institucionales, etc.) como internas (funcionamiento cognitivo, actitudes, creencias, condiciones afectivas, intelectuales, etc.) bajo las que se generan (que dan lugar a) tales situaciones y tratar de construir explicaciones causales plausibles de porqué ocurre así y cómo influye cada uno de los factores.

5. Diseñar y experimentar en su caso, allí donde sea posible, programas de intervenciones y modificación de condiciones, formas de actuación didáctica, diseños curriculares, planificaciones prácticas de aula, etc., orientados a mejorar / modificar las situaciones y condiciones constatadas en los puntos anteriores.

En todos los estudios se emplea una ***metodología*** mixta, en la que se combinan métodos no empíricos, como el análisis didáctico, y métodos empíricos y, dentro de estos últimos, métodos cuantitativos, para la validación empírica de tareas e instrumentos, la detección de regularidades, los estudios exploratorios y la construcción de escalas, y métodos cualitativos (entrevistas, etc), para confirmar los comportamientos y las regularidades encontradas, profundizar en las causas, averiguar el motivo de comportamientos singulares, profundizar en fenómenos no esperados y obtener los perfiles cognitivos de los distintos niveles de una escala. En general, los métodos no empíricos preceden a los empíricos y los cuantitativos a los cualitativos, en un proceso interno que va de lo teórico a lo empírico y de lo general a lo particular, de las descripciones generales y superficiales a las profundas y detalladas, de las macro-regularidades a las singularidades más extremas. El proceso metodológico se desarrolla en el orden siguiente:

1º) En los inicios del estudio, sobre todo al comienzo de la línea de investigación, y discrecionalmente en cualquier momento del desarrollo de los trabajos, se sigue una metodología no empírica como es el ***Análisis Didáctico*** (González 1995, 1999; Fernández Cano, 1996). Integrar los antecedentes en un marco común, organizar los conocimientos previos, establecer y analizar las prioridades, detectar las lagunas de las investigaciones anteriores, elegir el problema concreto y construir modelos teóricos contrastables empíricamente, son los principales fines de esta parte del desarrollo metodológico.

2º) Una vez definido el problema, se pasa al ***análisis, construcción y validación empírica de tareas***. El problema a resolver es el siguiente: ¿cómo observar lo más fielmente posible la verdadera situación de la comprensión o de las competencias / conocimientos / capacidades / destrezas de los escolares de distintas edades y cursos? Nos parece que es una parte difícil y crucial en todos los estudios que estamos desarrollando; no es fácil encontrar tareas funcionales, sencillas e idóneas para observar los comportamientos adecuados sin la intervención de factores y variables extrañas, poner de manifiesto exactamente lo que queremos, descubrir pautas y regularidades y discriminar a los alumnos en los justos términos del problema de investigación.

La validación empírica se suele hacer mediante aproximaciones exploratorias en las que se construyen y aplican distintas pruebas formadas por distintos tipos de tareas y se analizan el comportamiento y las respuestas de los sujetos. A veces se modifica la cantidad de información o algún otro factor y se estudian los efectos en los comportamientos. A veces, se utilizan pruebas diferentes que se aplican a muestras equivalentes y se analizan las diferencias en las respuestas. A veces también, cuando es necesario, se completa el estudio con entrevistas individuales ocasionales; de aquí se suelen eliminar tipos de tareas y se modifican las pruebas hasta obtener una prueba definitiva. Igualmente, se suele revisar el problema y redefinir en función de los resultados provisionales obtenidos en esta parte.

En cualquier caso, la cuestión de las tareas y pruebas tiene una importancia especial, en la medida en que tiene que ver directamente con el diagnóstico y la evaluación, aspectos importantes en la línea de investigación general. Pero, además, disponer de criterios para conocer, distinguir entre sí y categorizar las tareas de un campo conceptual, permitirá alcanzar un panorama más completo sobre los conocimientos matemáticos, analizar la potencialidad didáctica de cada tipo de tarea a efectos de conducir a la comprensión y poner de manifiesto la situación de la misma, establecer niveles de competencias y cubrir eventuales lagunas curriculares; aspectos que alcanzan a la investigación, al diseño de currículos y material y a la práctica docente. Igualmente se podrá comprobar la idoneidad y grado de dificultad, elaborar y contrastar instrumentos para el diagnóstico de la comprensión y establecer criterios y escalas para la valoración objetiva de la verdadera situación de los conocimientos correspondientes así como de su evolución. Por último, con la información e instrumentos anteriores, se podrá analizar los distintos elementos del currículo y realizar las modificaciones oportunas, establecer, secuenciar y experimentar nuevos métodos y tareas en el proceso didáctico, analizar los libros de texto y el material escolar, realizar evaluaciones curriculares a gran escala y proceder, en consecuencia, a revisiones generales sobre la base de los resultados obtenidos.

3º) *Estudio cuantitativo*, de carácter correlacional, causal o meramente descriptivo sobre una muestra amplia, a ser posible significativa si se trata de poner de manifiesto regularidades que creemos que son extensibles a la población de partida. Igualmente este tipo de estudios será útil para poner de manifiesto singularidades y grupos de comportamientos especiales ante las pruebas preparadas. El estudio será de escalamiento o de construcción de una escala acumulativa cuando se apliquen las pruebas a una muestra significativa para obtener una escala que discrimine a los escolares por niveles de comprensión, conceptualización, etc.

4º) *Estudio cualitativo*, para confirmar los comportamientos y las regularidades encontradas, profundizar en las causas, averiguar el motivo de comportamientos singulares, profundizar en fenómenos no esperados, disponer de una información más amplia sobre el problema investigado y obtener los perfiles cognitivos de los distintos niveles de una escala. Este tipo de estudio se puede realizar mediante un análisis individual de las mismas tareas utilizadas en el punto anterior, una entrevista estructurada, semiestructurada o libre, dependiendo del problema, un estudio de casos, una observación de una situación natural o preparando y aplicando de manera restringida (individual o pequeño grupo) nuevas actividades complementarias que validen la escala obtenida y determinen el perfil de cada nivel.

Otras características comunes de los estudios puntuales

Desde el punto de vista práctico:

- Los estudios se realizan en situaciones que podemos llamar “naturales”, lo que asegura la relevancia y validez de los hallazgos, la utilidad práctica de los resultados y su capacidad innovadora o de transformación efectiva de la realidad. La complejidad es tratada de manera global y específica desde el principio, por lo que no hay necesidad de control de variables significativas, si bien dicha complejidad obliga a que se realicen varias investigaciones relacionadas para disponer de una información más completa sobre el mismo fenómeno.
- no hay necesidad de participación numerosa y comprometida de profesores en ejercicio como investigadores, lo que evita los problemas de formación y de coordinación de los trabajos;
- no se produce interferencia con el desarrollo curricular ordinario, lo que introduce numerosas ventajas para la planificación y el desarrollo de la investigación.

Desde el punto de vista teórico:

- tareas no usuales (razonamiento inductivo, resolución de problemas, tareas constructivistas, etc.)
- búsqueda de un equilibrio entre teoría, resultados empíricos e incidencia real de los resultados en las aulas;
- carácter no local de los conocimientos generados; creíbles y capaces de ser compartidos, sistematizados, acumulados, replicados y validados, es decir, capaces de constituirse en conocimientos científicos. En este sentido se trata de un camino hacia la generalización, transferencia y replicabilidad de los resultados.
- el problema, el método y el marco teórico no son totalmente independientes; es posible hablar de un marco teórico común, identificador de la disciplina, estrechamente unido al marco metodológico. El marco teórico general debe presentar también, en cada caso, una parte común y una parte diferencial o específica del tipo de problema investigado. Si bien la aportación que presentamos constituye un modelo mixto en este sentido, es decir, no es sólo el problema lo que determina el método, sino que la propia naturaleza de los fenómenos determina una parte del método y este, en la medida en que proporciona una visión de conjunto del problema, incide a su vez en la decisión sobre el problema a investigar.

Una aproximación formal actualizada[6]

Las principales consideraciones o principios en los que se fundamenta el marco teórico y metodológico provisional en el que venimos desarrollando las investigaciones son los siguientes:

6. Presentada por primera vez en el III Simposio de la SEIEM, celebrado en 1999 en Valladolid.

Consideraciones generales

1. Si aceptamos que la investigación en el campo de la Educación Matemática es científica y, por tanto, "indagación sistemática con fines epistémicos" (Rico, 1999), es evidente que los enfoques, métodos, supuestos, interpretaciones, conocimientos generados y otras características de dichos procesos de indagación van a depender, básicamente, de las determinaciones que se adopten con respecto a la naturaleza de los fenómenos. Estas determinaciones surgen, o deben surgir, en el seno de un proceso dialéctico continuo entre la teorización y construcción de modelos y los conocimientos empíricos. Las diferentes aproximaciones existentes en la actualidad en este sentido no pueden ser antagónicas, incompatibles o independientes, como a veces se quieren presentar a modo de "religiones" que pugnan entre sí por la posesión de la verdad[7], sino que se encuentran relacionadas y se pueden valorar e integrar en un esquema de conjunto más amplio, buscando lo que las une, su utilidad, y no sólo lo específico, defectuoso o diferenciador.

2. Los fenómenos del campo de la Educación Matemática son complejos y sistémicos; en ellos interactúan numerosos factores relacionados, para cuyo análisis es imprescindible el estudio de dichas relaciones y la integración de perspectivas y procedimientos (Begle, 1961).

3. En dichos fenómenos intervienen aspectos generales, que forman parte también del interés de otras disciplinas, y aspectos que son específicos. Esta especifidad parcial se basa en la intervención decisiva del conocimiento matemático y de sus relaciones con otros campos (Vergnaud, 1990, pp. 22-23) en el marco de una "intencionalidad didáctica".

4. Las características específicas del conocimiento matemático impregnan necesariamente todas las facetas de los fenómenos educativos en matemáticas, dotando de personalidad propia a los diferentes campos que intervienen y a las relaciones entre ellos. La aproximación interdisciplinar es insuficiente; también es inadecuada la consideración de la Didáctica de la Matemática como una prolongación o rama especializada de la Didáctica General o de la Psicología de la Educación (Fischbein, 1990, pp. 6-12).

5. El análisis de los problemas debe partir de lo más específico, como es el conocimiento matemático, siendo necesario revisar las actividades y el proceso de investigación en su concepción usual (Romberg, 1992, p. 51) para incluir un doble punto de vista: Un enfoque genuino, para fundamentar y organizar el campo mediante un procedimiento también específico (González, 1999), y un enfoque operativo interdisciplinar posterior, en el que se aborden los aspectos puntuales que se deducen del estudio anterior mediante las estrategias y métodos usuales "importados" de áreas afines. Estos últimos son adecuados para propósitos particulares, pero no son suficientes ni prioritarios y se deben supeditar a los resultados del análisis previo indicado.

7. Síntoma de acientificidad según el profesor Caro Baroja.

Sobre el conocimiento matemático

6. El conocimiento matemático es un conocimiento perfectible, sujeto a errores, parcial e incompleto y tiene que ver con ideas u objetos conceptuales a los que el ser humano accede mediante el descubrimiento y la invención o creación no arbitrarias. Estos objetos son independientes de su simbolización, tienen una existencia ficticia o convencional y comparten dos ámbitos diferentes: el conceptual individual y el supraindividual, cultural o colectivo como parte de la conciencia compartida (Popper, 1979).

7. Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los objetos, sus propiedades, las acciones sobre ellos y las propiedades de estas acciones, pertenecientes todos ellos a un mundo único en expansión que contiene los productos de la cognición humana y, en particular, los productos de la actividad matemática (Puig, 1997, pág. 67).

8. La creación / descubrimiento del conocimiento matemático se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la han hecho y la hacen posible: las características comunes de la mente humana (fisiológicas, entre otras), del medio (físicas, sociales, culturales, entre otras) y de la interacción entre ambos (que proceden, entre otros motivos, de las necesidades propias de la adaptación del sujeto al medio). La intervención de los tres factores (mente, medio e interacción) se produce en todas las interpretaciones sobre la naturaleza y la producción del conocimiento matemático (González, Pascual y Flores, 1994).

Sobre el aprendizaje y la cognición en matemáticas

9. El enfoque evolutivo o de desarrollo es adecuado y útil para la investigación en Didáctica de la Matemática. El conocimiento matemático en el sujeto individual evoluciona tanto cualitativa (comprensión) como cuantitativamente (extensión). El enriquecimiento intelectual no consiste sólo en descubrir nuevas verdades sino en cambiar las perspectivas o desarrollar nuevos puntos de vista sobre el conocimiento ya existente.

Sobre la Educación Matemática, sus factores y relaciones

10. El campo de la Educación Matemática está constituido por el conjunto de fenómenos relacionados con las actividades humanas, sociales y culturales ordenadas y orientadas a hacer posible, desarrollar y optimizar la personalización, transmisión y creación de la cultura matemática considerada como experiencia colectiva organizada. Una de las finalidades primordiales de la Educación Matemática es la preparación de la intervención activa del individuo en la sociedad. El sistema convencional de enseñanza de las matemáticas y sus procesos de aprendizaje (Steiner, 1984), la formación de profesores de matemáticas y el Área de Conocimientos Didáctica de la Matemática constituyen partes importantes del campo de la Educación Matemática.

11. El análisis de los fenómenos del campo de la Educación Matemática debe incluir los análisis epistemológico, sociocultural, cognitivo y fenomenológico, que se han de relacionar entre sí y con un análisis sobre la enseñanza y el currículo como aspectos específicos y terminales.

12. Los factores que intervienen se pueden agrupar en torno a tres grandes áreas: la que corresponde al conocimiento, en la que hemos de destacar, a su vez, cuatro subáreas relacionadas: El conocimiento en sí (sobre Matemáticas o sobre Didáctica de la Matemática), su Historia, su Epistemología y su Fenomenología; la que hace referencia a los sujetos, atendiendo al aprendizaje y a la cognición, bajo el dominio de la Psicología; la que atiende a los medios en los que se producen las relaciones, con dos subáreas importantes: el medio sociocultural, bajo el ámbito de la Sociología, la Antropología y la Cultura, y el medio educativo formal, que engloba todo lo relacionado con la Enseñanza y el Currículum.

13. Los análisis epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos deben tener una orientación marcadamente didáctica. El interés se debe centrar en obtener información relevante para la enseñanza y el aprendizaje, lo que supone tener presente al alumno, sus necesidades y capacidades, el aula, las actividades, los métodos y técnicas didácticas usuales, etc.. Con la información obtenida bajo este enfoque peculiar se encuentra la conexión entre las distintas partes bajo una referencia común: *el pensamiento matemático individual y colectivo, su evolución, sus relaciones con otros tipos de pensamiento y su educación*.

14. Se sitúan en una posición privilegiada las relaciones entre la Epistemología y la Psicología y entre estas dos y la vertiente pedagógica, en lo que constituye un campo con múltiples relaciones que demandan una integración previa a la realización de los estudios particulares de las distintas parcelas que lo componen y desde los diferentes enfoques que se vienen utilizando; una integración que no debe agotarse en una simple adición de datos procedentes de campos y enfoques diferentes (concepción interdisciplinar), sino que requiere de una elaboración compleja que demanda una metodología específica que trasciende los procedimientos que se vienen utilizando.

Sobre la Didáctica de la Matemática, sus factores y relaciones

15. La Didáctica de la Matemática es un Área de conocimientos sobre los fenómenos relacionados con la enseñanza, el aprendizaje y la comunicación de las matemáticas (fenómenos de la Educación Matemática) en la institución educativa y en el medio social. Una de sus principales finalidades es identificar y resolver los problemas para optimizar los procesos educativos. Dos de sus principales tareas son: a) la investigación o indagación metódica y disciplinada con fines epistémicos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y b) la investigación y el desarrollo de la formación de profesores de matemáticas; dos tipos de tareas y fenómenos estrechamente relacionados (González, 1999).

16. Bajo el epígrafe a) se pueden identificar y separar, a efectos teóricos, las siguientes parcelas que en la práctica interactúan y operan conjuntamente: los aprendizajes y la cognición, la enseñanza y los procesos reales de enseñanza-aprendizaje. Las tres se encuentran estrechamente relacionadas bajo el dominio de la Psicología, la Pedagogía, la Didáctica General y la Sociología (Fischbein, 1990, pp. 6-12), en lo que constituye un primer nivel centrado en las finalidades educativas y en las características generales del conocimiento matemático. A su

vez, este primer nivel presenta una dependencia de otros factores, como son: la Matemática, su Epistemología y su Historia o la Fenomenología, en lo que constituye un segundo nivel más específico, centrado en las finalidades y en los contenidos matemáticos.

17. Los factores o componentes básicas de los fenómenos del tipo a) son: Los conocimientos "de" y "sobre" las Matemáticas, la Epistemología, la Historia y la Fenomenología del conocimiento matemático; los aspectos socioculturales relacionados con el conocimiento matemático; el aprendizaje y la cognición en relación con las matemáticas; la enseñanza y los aspectos curriculares en relación con el conocimiento matemático.

18. Los factores o componentes básicas de los fenómenos del tipo b) son: La Didáctica de la Matemática o Área de Conocimientos sobre los fenómenos del apartado anterior (conocimientos relacionados con la Educación Matemática), abarcando: los conocimientos "de" y "sobre" la Educación Matemática, la Historia, la Epistemología y la Fenomenología de la Educación Matemática; los aspectos socioculturales relacionados con el campo de la Educación Matemática y con el sistema de enseñanza de las matemáticas; el aprendizaje y la cognición de los profesores en formación y en ejercicio en relación con los fenómenos de la Educación Matemática; la enseñanza y los aspectos curriculares específicos de los planes de formación de profesores.

19. Las tres áreas básicas (conocimiento, sujetos y medios) y los factores mencionados son fuentes de información para los diseños curriculares, de tal manera que es posible justificar, situar y completar los organizadores curriculares (Rico, 1997) dentro del marco teórico que estamos describiendo. Es decir, el marco teórico tiene también utilidad para la elaboración de diseños curriculares en Matemáticas y en Didáctica de las Matemáticas, aportando información esencial sobre los distintos elementos (González, 1999, pp. 129 y 141).

Sobre la investigación y la metodología

20. Las áreas y factores indicados en los puntos anteriores constituyen fuentes de información primaria para la investigación sobre cada uno de los dos tipos de fenómenos señalados. Dicha información debe siempre ser matizada y analizada en el marco general de la intencionalidad didáctica para los fenómenos del tipo a) y de la intencionalidad formativa profesional para los fenómenos del tipo b); ambas intencionalidades son diferentes y dotan de personalidad propia a las investigaciones correspondientes.

21. La información primaria o básica sólo comienza a adquirir el carácter de información específica del campo de estudio y a profundizar en la naturaleza compleja y sistémica de los fenómenos cuando se le hace intervenir en una red de relaciones entre las áreas y factores en juego (González, 1995, 1999). El análisis cualitativo de dichas relaciones permite integrar informaciones aisladas, a veces dispersas y aparentemente dispares, proporcionando nuevos conocimientos y modelos teóricos y abriendo nuevas perspectivas. La profundidad y la extensión de dicho análisis dependen del problema y de la situación de las investigaciones anteriores.

22. El análisis mencionado requiere de una elaboración compleja que demanda una metodología específica que trasciende los procedimientos que se vienen utilizando. Para ello, empleamos el método específico que hemos denominado "Análisis Didáctico" (González, 1998) y que consiste en un procedimiento cualitativo no empírico que toma como punto de partida los principios del meta-análisis, la revisión multivocal y lo que se conoce como análisis conceptual.

23. El empleo del Análisis Didáctico, la intervención de las tres áreas básicas y sus componentes o factores en el marco de la intencionalidad específica y la red de relaciones como núcleo del estudio teórico y generador de modelos, no intervienen en la aproximación interdisciplinar usual. Estamos ante una nueva aproximación por la que se establece una parte específica (hasta ahora previa en el desarrollo de la investigación, aunque no tiene porqué ser así) que organiza el campo de fenómenos, facilita las decisiones sobre el problema y el diseño de la investigación y proporciona un marco amplio en el que se pueden integrar otras aproximaciones.

REFERENCIAS

Begle, E. (1979). *Critical variables in Mathematics Education*. Washington, D. C.: MAA. NCTM.

Bishop, A. J. (1992). International perspectives on research in Mathematics Education. En: Grouws, D. A. (eds.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 710-723). New York: MacMillan Publishing Company.

Fernández Cano, A. (1995). *Métodos para evaluar la investigación en Psicopedagogía*. Madrid: Síntesis.

Fischbein, E. (1989). Introduction. En Nesher, P.; Kilpatrick, J. (edit.) *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press; pp. 1-13.

González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Colección Monografías de Investigación. SPICUM Universidad de Málaga.

González, J. L. (1998). *Números naturales relativos*. Colección Mathema. Granada: Editorial Comares.

González, J. L. (1999). *Proyecto Docente*. Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga. Inédito.

González, J. L. (1999). Comentarios a la ponencia "Ingranaggi e cerchi". *Actas Escuela de Verano de Didáctica de la Matemática Luso-Italo-Española*. Santarem (Portugal), 6-10 de julio. En prensa.

González, J. L.; Pascual, J. R.; Flores, P. (1994). Epistemología y Educación Matemática. Capítulo en Rico, L.; Gutiérrez, J. (edit) *Formación científico-didáctica del Profesor de Matemáticas de Secundaria*. Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Gra-nada. pp. 25-39.

González, J. L. y otros, (1990). Números enteros. Madrid: Síntesis.

Hiebert, J.; Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with understanding. Capítulo 4 en Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Pub. Co.

Ortiz, A. (1993). *Series Numéricas y Razonamiento Inductivo*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento Inductivo Numérico*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Popper, K. R. (1989). *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico*. Barcelona: Paidós.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico, L. (ed.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: ICE-Horsori.

Rico, L. (1997). Los Organizadores del Currículo de Matemáticas. En Rico, L. (ed.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: ICE-Horsori.

Rico, L. (1999). Educación Matemática, Investigación y calidad. Contribución al Panel: "Qualidade da Investigaçao". *Actas Escuela de Verano de Didáctica de la Matemática Luso-Italo-Española*. Santarem (Portugal), 6-10 de julio. En prensa.

Rico, L.; Castro, E.; Sierra, M. (1999). *Didáctica de la Matemática*. Documento inédito. Autores.

Romberg, T. (1992). Perspectives on Scholarship and Research Methods. En Grouws, D. A. (eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 49-64). New York: MacMillan Publishing Company.

Sierpinska, A.; Kilpatrick, J. (eds.) (1998). *Mathematics Education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht: Kluwer.

Steiner, H. G. y otros (eds.) (1984). *Theory of Mathematics Education*. ICME 5. Institut für Didaktik der Mathematik. Universität Bielefeld.

Vergnaud, G. (1990). Epistemología y Psicología de la Educación Matemática [Capítulo 1]. En Nesher, P.; Kilpatrick, J. (eds) *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press; 1990: pp. 14-30.

Vergnaud, G.; Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénetique. *Revue Francaise de Pedagogie*, 36, pp. 28-43.

Investigación en razonamiento inductivo numérico y algebraico

Alfonso Ortiz Comas
José Luis González Marí
Universidad de Málaga

RESUMEN

Uno de los problemas de la investigación en Didáctica de la Matemática es la diversidad de resultados. Resultados que al no estar integrados en un todo coherente no trascienden a la práctica docente. Otro problema es que la mayor parte de los modelos y teorías que son referentes en los diseños curriculares no tienen en cuenta estos trabajos puntuales. Desgraciadamente la pluma de muchos autores aporta más que la investigación. Podemos decir que existen modelos y planteamientos teóricos necesitados de verificación empírica. Este estado es lo que aconseja aunar esfuerzos para desarrollar líneas de investigación coherentes en cuanto al contenido, los fines, los planteamientos y los métodos. Los investigadores en Razonamiento Inductivo Numérico y Algebraico pretendemos desarrollar una línea de investigación cuyos resultados posibiliten la construcción de un modelo teórico de desarrollo evolutivo del razonamiento inductivo en aritmética y álgebra.

1. INTRODUCCIÓN

Realizadas las búsquedas bibliográficas necesarias en las diferentes fuentes de documentación científica, podemos llegar a la conclusión siguiente: no existe en Didáctica de la Matemática una línea de investigación cuyo objeto sea el Razonamiento Inductivo, que no sea la que estamos presentando.

Por otra parte, sí existen propuestas curriculares en las que se considera el razonamiento inductivo como imprescindible para la comprensión y construcción por parte de los escolares del conocimiento matemático: Winter y Ziegler (1975), Rico (1978, 1982), Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática del N.CT.M. (1991).

También nos encontramos autores que proponen situaciones didácticas para que los alumnos trabajen el razonamiento inductivo: Shanon and Austin (1992)

Desde la propia investigación matemática se concluye la trascendencia e importancia de la inducción y del razonamiento inductivo: Godement (1948), Lakatos (1978), Diudonné (1989), etc.

Éstas y otras son justificaciones suficientes para iniciar una línea de investigación cuyo objeto sea indagar el papel del razonamiento inductivo en los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática, en concreto de la inducción numérica y el estudio de patrones en el aprendizaje de las diferentes estructuras numéricas.

Considerando que una línea de investigación debe especificar en lo posible los problemas a investigar, me veo en la necesidad de explicar los orígenes y la situación actual de nuestro campo de investigación. También consideramos necesario orientar cómo conseguir los objetivos definidos en un marco teórico, exponiendo un marco metodológico.

2. ORÍGENES TEÓRICOS Y EMPÍRICOS DE LA LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: SU OBJETO

En sus inicios, esta línea de investigación se ha sustentado en tres ámbitos de investigación: Epistemología de las Ciencias y la Matemática, Psicología del Aprendizaje y Educación Matemática.

Consideramos la Epistemología de las Ciencias y la Matemática como fuente inagotable de reflexión didáctica y de análisis del conocimiento matemático, por ello, en los marcos teórico de las diferentes investigaciones hemos de poner en relación el problema a investigar con las características Matemáticas, Lógicas y Epistemológicas del Razonamiento Inductivo: Bacon (1620), Descartes (1638), Mill (1843), Jevons (1873), Peirce (1867, 1901, 1910, 1918), Poincaré (1902), Russell (1912), Keynes (1921), Cohen (1931), Popper (1933), Carnap (1950), Polya (1944,1953, 1962-64), Piaget (1953, 1956, 1967, 1971, 1974, 1979,1980, 1985), Piaget y Morf (1970), Hempel (1966), Stebbing (1967), Black (1974), Chalsmers (1976), Lakatos (1978, 1987), Manzano (1981), Dancy y Sosa (1992), Kiaer (1995)

El objeto de las indagaciones epistemológicas es profundizar en lo que se ha entendido y se entiende por razonamiento inductivo en distintas ramas del conocimiento científico y cuál es su papel elaborador en las mismas, para construir modelos que se ajusten al desarrollo de los razonamientos aritméticos y algebraicos en los escolares: *“El objeto de este análisis es la búsqueda de modelos* *inductivos que sirvan para plantear hipótesis e interpretar resultados de una fase empírica"* (Ortiz, 1997)

En cuanto a la Psicología del aprendizaje, decir que nos hemos acercado a este campo de investigación con dos intenciones claras: La primera, ver el papel que juega la inducción en los modelos interpretativos de la inteligencia del ser humano y la segunda, obtener información de las técnicas de investigación utilizadas.

Desde la perspectiva psicológica nuestros primeros trabajos (Ortiz, 1993) consideraron las teorías y autores del cuadro adjunto.

INDUCCIÓN EN PSICOLOGÍA	Conductismo clásico: Teoría continuidad (E-R)	Inducir por asociaciones	Hull, 1920
	Cognitivismo: Teoría discontinuidad Paradigma mediacional	La inducción de reglas procedimiento en el aprendizaje de conceptos:	Mayer, 1985
		La inducción como una capacidad:	Pellegrino, 1976
		Análisis de procesos cognitivos:	Holtzman, 1983
		Elaboración de la información:	Stemberg, 1986
		Errores del razonamiento inductivo:	Ross, 1981
	Constructivismo de J. Piaget	La inducción como instrumento intelectual: La inducción como generalización de estructuras	Piaget, 1955 Oléron, 1963 Sastre y Moreno, 1983
	Psicometría	La inducción como instrumento de medida (Test de inteligencia):	Guilford, 1959

Debemos tener en cuenta que cada perspectiva psicológica modifica la intencionalidad de una investigación, por tanto introduce matices a tener en cuenta que pueden modificar las hipótesis, los objetivos y la metodología.

Por último, en cuanto a la Educación Matemática, tal y como hemos expuesto en la introducción, no existe en Didáctica de la Matemática una línea de investigación en Razonamiento Inductivo; a pesar de ello el tema ha sido de interés, como lo avalan los trabajos publicados en los últimos 30 años, los cuales hemos organizado de acuerdo con los siguientes apartados:

a) Método de inducción completa.

Hay una gran cantidad de publicaciones: Macarow (1972); Avital (1972); Malcom (1974); Pinker (1976); Hirsch (1976); Higgins (1990). En ellas se ha considerado el método de inducción completa como componente del conocimiento matemático y, por tanto, estas publicaciones se centran en trabajos experimentales con alumnos de cursos avanzados para estudiar y analizar el dominio que poseen del método de inducción completa. En la mayoría de los casos son estudios experimentales.

b) Modelos lógicos

Desde la modelización lógica del razonamiento inductivo, Dubinsky (1986) amplía los trabajos del apartado anterior al considerar la regla del “modus ponens” en un modelo denominado descomposición genética de la inducción matemática.

c) Modelos cognitivos

Desde una perspectiva psicológica se ha considerados la inducción de patrones desde el punto de vista del procesamiento de la información: Lee (1982), Ropo (1987).

En el momento actual y en Educación Matemática son relevantes las investigaciones en relación con el papel de la representación en la construcción escolar del conocimiento matemático (Tall (1991), Vinner (1983)). En este sentido, dentro del grupo de Pensamiento Numérico destacan trabajos como el de Castro (1995), en el que se ve la importancia de las representaciones gráficas para interpretar y descubrir patrones en sucesiones numéricas. En la misma línea, Cuoco (1992) expone el significado de la Matemática Inductiva en un contexto visual.

d) Propuestas curriculares

Se han realizado propuestas didácticas de la inducción numérica para Primaria y Secundaria, como la desarrollada por Christiansen (1970). También, desde una perspectiva de orientación curricular, podemos considerar los resultados obtenidos por Castro (1995).

Existen publicaciones como la de Maurer (1995) que no constituyen investigaciones en relación con la inducción, pero que, sin embargo, sugieren aspectos concretos que pueden ser de utilidad para el profesor desde un punto de vista de la práctica docente.

3. LÍNEA DE INVESTIGACIÓN EN INDUCCIÓN NUMÉRICA Y ALGEBRAICA

Con esta línea de investigación se pretende ampliar nuestro conocimiento sobre los procesos cognitivos del razonamiento inductivo. Su objeto es la relación entre los procesos de razonamiento inductivo en los sujetos y la construcción-aprendizaje de las diferentes estructuras numéricas.

Hasta el momento solo hemos investigado sistemas inductivos de Peano (Sistemas que son modelos de los axiomas de Peano de los números naturales (Manzano (1981)). Las series numéricas son ejemplos de estos sistemas y constituyen el soporte material de las investigaciones realizadas.

Considerando *el razonamiento inductivo numérico como un razonamiento en el que intervienen procesos mentales, lógicos, aritméticos o algebraicos, implícitos en la realización de inferencias o generalizaciones inductivas en series numéricas, así como los conceptos y propiedades del número que se utilizan en dichos procesos,* hemos construido un modelo teórico del razonamiento inductivo numérico desde una perspectiva evolutiva. Para describir el modelo hemos considerando la construcción escolar de las estructuras numéricas a nivel aritmético y algebraico (Ortiz 1997)

Una síntesis del modelo se expone en el cuadro adjunto. Los descriptores utilizados para los diferentes bloques consideran la aritmética elemental. En las distintas investigaciones se pretende relacionar los diferentes bloques con las características epistemológicas, lógicas y psicológicas del razonamiento inductivo.

Hasta el momento sólo se han investigado los bloques Numérico y Aritmético y desde una perspectiva finita (sin consideración del infinito). Hemos demostrado que en Educación Primaria (6-12 años) la capacidad en razonamiento inductivo numérico de los alumnos evoluciona de acuerdo con seis niveles. Simultáneamente se ha obtenido un test para clasificar a los alumnos de Educación Primaria según estos niveles.

MODELO TEORICO DE DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO NUMERICO

BLOQUES	ESTADOS	CARACTERISTICAS LOGICO-MATEMATICAS
GENERAL No inductivo	Estado 1: Topológico	Linealidad y orden topológico
	Estado 2: Etiquetaje	Asignar un nombre, objeto, símbolo, etc. a cada elemento de la serie.
PRENUMERICO	Estado 3: Infralógico-simbólico	Alternancias, ritmos, periodos, etc con signos numéricos
	Estado 4: Simbólico-cuantitativo	Percibir el aumento y disminución de cantidades discretas (cantidades de e fras en las representaciones)
NUMÉRICO	Estado 5: Representacional o simbólico-ordinal	Dominio ordinal de la serie numérica básica. Contar de n en n, con n<10.
	Estado 6: sintáctico-numeral	Contar de n en n con n>10, basándose en la serie numérica básica y en las regularidadesdel sistema de representación
ARITMÉTICO	Estado 7: Aritmético-Aditivo	Progresiones aritméticas aditivas y sustractivas
	Estado 8: Aritmético-multiplicativo	Progresiones geométricas multiplicativas y partitivas
ALGEBRAICO	Estado 9: Algebraico	Término general Generalización algebraica

Ortiz (1998)

4. MARCO TEÓRICO: ALGUNAS CUESTIONES CENTRALES

Consideramos que el marco teórico de una línea de investigación es cuestión de planteamientos y de postulaciones previas que dan sentido y significación, rigor, completitud, exactitud, coherencia (tanto interna como externa) y validez de constructo (Bizquerra (1989), Fernández Cano (1995)) a las investigaciones concretas.

Partimos de la consideración de que todo conocimiento científico tiene dos características básicas: una extensión y una comprensión (Stegmuller (1970), Mosterin (1980)).

En cuanto a la extensión, en toda disciplina, y por tanto en Matemáticas, siempre las fronteras son difusas. Difícilmente podemos desde la propia Matemática interpretar toda su extensión (Gödel, 1931) y en consecuencia este problema siempre está abierto. La conclusión holística a la que llegamos es que los conocimientos no están claros y por tanto el acceso al conocimiento es un misterio difícil de dilucidar. En tal sentido, la investigación en Didáctica de la Matemática debe esclarecer algunas cuestiones centrales.

El problema de la comprensión tiene que ver con los orígenes de los conocimientos. Para algunos autores todo conocimiento nuevo se construye a partir de uno viejo. Nuestra pregunta en Aritmética la podemos formular: ¿Cuales son las nociones y procesos básicos en los comienzos de la aritmética que supeditan las construcciones posteriores?.

Para responder a esta pregunta hay que tener en cuenta la diversidad Matemática, debido a la cual un mismo concepto puede obtenerse a partir de sistemas axiomáticos distintos. Esto ocurre en Aritmética como en cualquier otra rama del saber matemático.

También hay que tener en cuenta al sujeto cognoscente, planteándonos un nuevo problema: el de la objetividad y subjetividad. Consideramos la objetividad como una adaptación a unas hipótesis de partida y a un método, ambos condicionados por la subjetividad que los fija a partir de un sistema conceptual que determina lo que pensamos y condiciona nuestros juicios y las conclusiones a las que podamos llegar. Estos juicios dependen a su vez de los conceptos que disponemos en un momento determinado y de la capacidad de razonamiento individual. A todo ello, hay que añadir que la verdad depende del tipo de verdad (Hessen (1925) que pretendemos obtener.

Debemos tomar una postura que minimice problemas como los planteados y, por tanto, consideramos que una postura evolutiva es propia para la investigación en Didáctica de la Matemática. Ver el conocimiento matemático como algo cambiante tanto cualitativamente (comprensión) como cuantitativamente (extensión). El enriquecimiento intelectual no sólo es cuestión de descubrir nuevas verdades, sino cambiar las perspectivas del propio conocimiento; ello nos lleva a considerar el conocimiento desde el punto de vista de su desarrollo.

Pretendemos encontrar en grupos determinados de escolares españoles distintos estados de razonamiento inductivo en numeración, aritmética y álgebra, marcando las pautas de su evolución progresiva.

5. MARCO METODOLÓGICO

En relación con los planteamientos del Marco Teórico, debemos ser consecuentes, buscando un marco metodológico adecuado o que sea lo más adecuado posible. Nosotros pretendemos medir de alguna manera la evolución de los conceptos y las estrategias de razonamiento en los escolares, construyendo instrumentos que posibiliten determinar tanto el estado global de un núcleo de escolares (evolución tanto de los conceptos como de las estrategias por edades y cursos) como el estado en que se encuentra un escolar determinado.

Por el momento y desde una perspectiva evolutiva, pretendemos construir escalas acumulativas con modelos paramétricos (Guttmann (1950), Ellis y Wollemberg (1993), Mokken (1971), Molenaar (1982, 1983, 1986, 1994), Molenaar y Sijtsman (1987,1999)), que permitan diferenciar a los alumnos por niveles de comprensión, conceptualización y razonamiento. Por este motivo las investigaciones deben utilizar una metodología mixta, combinando métodos cuantitativos para la construcción de escalas, y cualitativos (entrevistas, etc.) para obtener los perfiles cognitivos de los distintos niveles. Para la construcción de las escalas es necesario un análisis y validación empírica de tareas.

En los inicios de la línea de investigación y para organizar los conocimientos que intervienen y plantear nuestro modelo evolutivo hemos seguido una metodología no empírica, como es el Análisis Didáctico (González, 1995, Fernández Cano, 1996), que incluye estudios históricos y curriculares. En las cuestiones pendientes de investigar no es necesario indagar en los antecedentes, sí exponer el estado de la cuestión. Ello posibilita una mayor eficacia en la investigación produciéndose un efecto multiplicador de resultados.

Pretendemos llegar a un método lo más sistemático posible por el bien de la investigación en Didáctica de la Matemática. En cada investigación particular, una vez definido el problema a investigar como consecuencia del estado de la cuestión, el proceso a seguir podemos ordenarlo en tres fases:

1ª fase: Análisis y validación empírica de tareas

El problema a resolver es cómo observar lo más fielmente posible la situación real de las competencias de los escolares de distintas edades y cursos, en razonamiento inductivo.

Encontrar las tareas que posibiliten al investigador descubrir pautas y regularidades que discriminen a los alumnos. Tareas que sean idóneas, exigiéndoles requisitos de funcionalidad en la recogida de información como en el tratamiento posterior de la misma. No es un estudio piloto.

Las constantes que se puedan extraer a partir de los resultados obtenidos con las tareas idóneas nos llevan a considerar los conocimientos que intervienen y localizar empíricamente el problema.

2ª fase: Construcción de una escala

Las tareas se aplican a una muestra significativa para obtener una escala acumulativa que discrimine a los escolares. De acuerdo con un diseño previo en el que se han fijado las variables a tener en cuenta, se estudia si la escala obtenida discrimina por edades y cursos, viendo qué factores los determinan, previo un estudio piloto.

3ª fase: Estudio cualitativo

Para confirmar e interpretar los niveles obtenidos, se preparan actividades complementarias con el fin de validar la escala obtenida, determinando el perfil de los escolares de cada nivel. La escala se confirma si alumnos de niveles diferentes, al razonar, utilizan esquema inductivos diferentes, y alumnos de un mismo nivel esquemas equivalentes.

Existen razones teóricas y prácticas que aconsejan un mismo marco teórico y metodológico para aunar resultados. Consideramos fundamental la uniformidad teórica y empírica en la investigación en Didáctica de la Matemática para obtener modelos interpretativos de los procesos de enseñanza aprendizaje de la Matemática.

6. AGENDA DE INVESTIGACIÓN

Tenemos por delante dos etapas diferenciadas:

primera etapa: culminar la investigación en sistemas inductivos de Peano en las distintas estructuras numéricas tanto a nivel finito como infinito.

segunda etapa: Pasar a otros sistemas inductivos.

Restringiéndonos a la primera etapa, nos hemos planteado los siguiente objetivos:

a) Terminar de confirmar el modelo evolutivo de Razonamiento Inductivo Numérico tanto en niveles superiores como inferiores a la Educación Primaria. Con la consideración de la generalización aritmética , el paso al álgebra y al infinito para los niveles superiores.

b) Introducirnos en estructuras numéricas como los números relativos, racionales y reales

c) Completar los perfiles en Razonamiento Inductivo Numérico y Algebraico de los diferentes niveles.

7. INVESTIGACIONES EN CURSO DE REALIZACIÓN

A continuación exponemos brevemente las investigaciones en curso de realización. En su mayor parte están terminando la primera fase o iniciando la segunda, por lo que esperamos obtener resultados de aquí a un par de años.

1) *Análisis del Razonamiento Inductivo Numérico a partir de series numéricas naturales complejas.*

El objetivo fundamental de este trabajo es el de determinar estrategias y procedimientos de descubrimiento de regularidades numéricas utilizados por los escolares de Educación Secundaria y estudiar su desarrollo, determinando una escala que discrimine evolutivamente a los alumnos.

En Educación Secundaria el curriculum en aritmética se orienta más al Álgebra que a profundizar en una aritmética avanzada del número, por ello se plantean a los alumnos tareas de continuar series cuyos criterios no son elementales.

2) *Evolución del Razonamiento Inductivo Numérico en las sucesivas ampliaciones del campo numérico.*

En la enseñanza de la aritmética del número natural se omite el número natural relativo, lo que aumenta considerablemente el problema de comprensión en el aprendizaje de los números enteros.

A partir de situaciones de inducción en situaciones relativas simples, que son situaciones en las que intervienen tres medidas referidas a una misma magnitud, de las cuales una de ellas es una medida natural relativa (González, 1995), se pretende evaluar la evolución del Razonamiento Inductivo Numérico considerando los números naturales, los naturales relativos y los números enteros.

3) *Razonamiento Inductivo Numérico en la transición de la Aritmética al Álgebra.*

Considerando que en el paso de la aritmética al álgebra se producen dos fenómenos básicos como son la generalización de las propiedades aritméticas y un cambio de representación desde un lenguaje natural a un lenguaje simbólico-algebraico, se pretende caracterizar el proceso cognitivo de generalización de series numéricas, desde el descubrimiento de criterios hasta la generalización algebraica de los mismos mediante sus términos generales.

4) *Relaciones Lógicas-ordinales entre los términos de la secuencia Numérica en niños de 3 a 6 años.*

Se confrontan dos planteamientos clásicos como son el modelo piagetiano, que se preocupa fundamentalmente de la madurez cognitiva, y el enfoque de procesamiento de la información, que favorece la precocidad y la cuantificación de lo adquirido.

Desde la perspectiva piagetiana se considera la secuencia numérica sobre la base de la estructura operatoria de seriación (Piaget y Szeminska (1941), Flavell (1982), Kamii (1982), Fuson (1988).

Desde el modelo de integración de habilidades o procesamiento de la información se considera la secuencia numérica como una componente del conteo (Siegler y Robinson (1982), Fuson (1982, 1985, 1988), Fuson y Hall (1986), Gelman y Gallister (1978), Richards y Briards (1982), Wagner y Walters (1982), Saxe (1977, 1981, 1989), Song y Ginsburg (1988), Klahr y Wallace (1976), Sofhian (1977), Acredolo (1982).

Teniendo en cuenta los trabajos correspondientes a los dos planteamientos anteriores, nuestra investigación está centrada en el estudio del establecimiento de relaciones ordinales en la secuencia numérica. Trabajamos con niños que dominan parcial o totalmente el conteo o recitado de la secuencia numérica para poder determinar la evolución de las relaciones ordinales.

5) *Usos y significados del signo igual en Aritmética y Álgebra.*

A partir de un estudio de los usos y significados de la igualdad y del signo igual en la vida cotidiana, en los libros de texto, en Lógica y Matemáticas, se pretende investigar la evolución de la igualdad en los escolares desde las primeras identidades numéricas hasta las identidades algebraicas, pasando por las transformaciones aritméticas.

Este trabajo ha surgido por necesidad para interpretar ciertas relaciones inductivas planteadas en las investigaciones anteriores. No es un trabajo en razonamiento Inductivo Numérico pero sí de interés para interpretar perfiles cognitivos en los diferentes niveles de Razonamiento Inductivo Numérico.

REFERENCIAS

Ackerman, R. :1961,: «*Simplicidad inductiva*», en *Philosophi of Science*, vol. 28, (1961) pp. 152-161. Compilación de P.H. Nidditch. (Trad. cast. de V.M. Suárez Davila: «*Filosofía de la ciencia*¨. México. Fondo de Cultura Economica 1975).

Adler, J. E. :1980, «*Criteria for a Good Inductive Logic*». Oxford Clarendon PR, págs. 379-405.

Avital, S. :1972, «*Induction and Deduction in a Unit of Early Algebra*». *School Science and Mathematics*. V. N. 8, págs. 692-696.

Avital, S.:1976, «*Mathematical Induction in the classroom*». Educational Studies in Mathematics, 7, págs. 399-411.

Avital, S.:1978, «*Mathematical Induction in the Classroom: Didactical and Mathematical Issues*». *Educational Studies in Mathematics*, 9, págs 429-438.

Bacon, F.:1620, «*Novum organum, sive indicia vera de interpretacione nature et regio hominis*». (Trad. cast. de Cristobal Litran: «*Novum organum. Aforismos sobre la interpretación de la naturaleza y el reino del hombre*». Barcelona. Fontanella 1985)

Bisquerra, R. :1989, «*Métodos de Investigación Educativa*». Barcelona Ediciones C.E.A.C..

Black, M. :1974, «*The Justification of Induction*». Oxford University Press. (Trad. Cast. « *La justificación del razonamiento inductivo*» Madrid. Alianza . 1976)

Blieszner, R.:1981, «*Training Research in Aging on the Fluid Ability of Inductive Reasoning*». *Journal of applied developmental psychology* 2, págs. 247-265.

Boulger, W. :1989, «*Pythagoras Meets Fibonacci*». *Mathematics Teacher*." Vol. 82, April. Págs. 277-282.

Briand, J.:1993, *L´enumaration dans le mesurage des collectións*. Thése. L'Université de Bordeaux.

Brumfiel, C. :1974, «*A note on Mathematical Induction*». *Mathematics Teacher*. Vol. 67, N 7. Págs 617-618.

Burks A, W.:1980, «*Enumerative Inductión versus Eliminative Induction*». Oxford: Clarendon PR. Págs 172-189.

Carlson, J.:1974, «*The relationship between multiplicative classification and inductive reasoning*». *The Journal of Genetic Psychology*. N 125, Págs 265-272.

Carnap :1950, «*Logical Foundations of Probability*». Chicago.

Carpenter, T.P.:1980, «*Research in cognitive development* «. *Research in Mathematics Education* N.C.T.M. Reston. Virginia. Págs 146-206.

Castro, E.:1994, «*Exploraciones de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14)*» Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Cohen, M.R.:1931, «*Reason and nature*» New york. Harcourd Brace and Company.

Cohen, L.; Manion, L. :1990, «*Métodos de investigación educativa*». Madrid. Muralla

Colberg, M et All.:1982, «*Inductive Reasoning In Psychometrics: A Philosofhical Corective*». Intelligence. V. 6, N. 2, Apr-jun, Págs. 139-164.

Cornell, R.H.-Siegfried, E.:1991, «*Incorporating Recursion and Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum*». En *Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12*. Year Book. N.C.T.M.

Costa, N.C.A.:1987, «*Outlines of a system of inductive logic*». *Teoría* 2/1987.

Christiansen, B.:1969, «*Induction and deduction in the learning of mathematics and in mathematical instruction*». *Educational Studies in Mathematics* 2 (139-149).

Dancy, J., Sosa, E. :1992, «*A Companion to Epistemology*». Blaskwell Companionsto Philosophy. Edited by Jonnathan Dancy and Ernest Sosa. Oxford.

Dieudonné J. :1989, «*En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*» Madrid. Alianza Universidad.

Dofson, E. L. y Summers, G. F.:1982 «*Como elaborar escalas técnicas de Guttman*». En Summers, C.F. : «Medición de actitudes». México. Trillas. Cap. 11)

Dubinsky, E. :1986, «*Teaching mathematical induction*» *Journal of Mathematical Behavior.V*. 5/3, Dec. Págs. 305-317.

Ernest, P.:1984, «*Mathematical Induction: A pedagogical discussion*». *Educational Studies in Mathematics 15*. Págs. 173-189.

Fernández Cano, A.:1995, «Metodologías de la investigación en Educación Matemática». En «Investigación en el aula de matemáticas». Berenguer, L., Flores P. Editores. Edita Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. S.A.E.M. Thales. Págs. 47-65.

Fischbein, E. (1989): «*Introduction*». En Nesher, P. ; Kilpatrick, J. (eds). *Mathematics and cognition*. Cambridg University Press. pp 1-13.

Fraisse, P. Piaget, J. :1967, «*Traité de Psychologie Expérimentale (VII) L'Intelligence*». Presses Universitaire de France. (Trad. cast. de Victor Fichman,»*Tratado de psicologia experimental-VII La Inteligencia*». Barcelona: Paidós 1983).

Gawronski, J.D.: 1972, «*Deductive and inductive learning styles in junior high school mathematics: an exploratory estudy". Journal for Research in Mathematics Education*. Vol.3, Nov. 1972. Págs. 239-247.

Ginsburg, H.P; Kossan,N.E.:1983, «*Protocol methods in researh on mathematical thinking*». En «*The Development of Mathematical thinking*» Academic Pres National.

Goetz J. P. y LeCompte, M. D.:1988, «*Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*». Madrid. Morata.

González, J.L.:1995, «*El campo conceptual de los números naturales relativos*». Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Guttman, L.:1947, «*The Cornell technique for scale and internsity analysis*» Educational and Psychological Measurement 7: 247-280.

Guttman, L.:1941, «*The phi coefficient and of item validity*». Psychometrika 6: 11-19.

Hempel C.G. :1965, « *Aspects of scientific explanatión and other essays in the Philosofhy of Science*». New York. Free Press. (Traducción castellana de Frasineti, G. M. y Otros: «*La explicación cientifica*». Barcelona. Paidós. 1988).

Hempel, C. G.:1956, «*Sobre la naturaleza de la verdad matemática*» En «*El mundo de las matemáticas*». Barcelona. Grijalbo. 1969. Págs. 7-23.

Hempel, C.G.:1966, «*Philosofhy of Natural Science*». New Jersey: Prentice-Hall. (Traducción castellana: «*Filosofía de la Ciencia Natural*». Madrid. Alianza Universidad. 1989).

Hessen, J.:1925, «*Teoría del conocimiento*» Caracas. Editores Mexicanos Unidos.

Higgis, A. W.:1990, «*An interesting example using induction*» *Mathematics and Computer Education* , V. 24/2 SPR, Págs. 130-134.

Hirsch, C. R.:1976, «*Making Mathematical Induction Meaningful*» *School science and Mathematics*. V. 76/1, Jan. Págs. 27-31.

Holzman, T. G.:1976, «*Process training derived fron a computer simulation theory*». *Memory and Cognition, 4*,pág. 349-356.

Holzman, T.G., Pellegrino, J.W. , Glaser, R.:1983, «*Cognitive variables in series completion*». *Journal of Educational Psychology*, 75, págs. 603-618.

Howson, C.:1984, «*La metodología de las disciplinas no empíricas*». En Feyerabend, P. «*Estructura y desarrollo de la ciencia*». Madrid. Alianza. Págs. 291-300.

Inhelder, B., Piaget, J.:1955, «*De la logique de l'enfant á la loguique de l'adolescent*» París, PUF. (Versión castellana: «*De la lógica del niño a la lógica del adolescente*». Buenos Aires. Paidós. 1972)

Jevons, W.S.:1873, «*Principles of Sciencie*» (Trad. Cast. de Carlos E. Prélat: «*Los principios de las ciencias*». Madrid. Espasa Calpe, 1946).

Keeves, J. P. (Edit).:1988, «*Educational Research, Methodology and Measurement*». An International Handbook. Oxford. Pergamon.

Keynes.:1921, «*A tratise on Probability*». Londres.

Klauer, K. J.:1990, «*A Process Theory of Inductive Reasoning Tested by the Theaching of Domaing-Specific Thinking Strategies". European Journal of Psicology*. Vol. V, n 2, Págs. 191-207.

Klotz, F. S.:1987, «*Turtle Graphics and Mathematical Induction». Mathematics Teachers*. November 1987. Págs. 636-639.

Lakatos, I.:1978, «*Mathematics, Science and Epistemology*» *Fhilosophical Papers*. Vol. 2. Cambridge: University Press. (Trad. cast. de Ribes Nicolás, D.: «*Matemáticas, Ciencia y Epistemología*». Madrid. Alianza, 1981).

Lakatos, I.:1978, «*Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*». Madrid. Alianza.

Lakatos, I.:1987, «*Historia de la ciencia*». Madrid. Tecnos.

Lee, S. S.:1982, «*Acquisition of Inductive Bicondicional Reasoning Skills: Training of Simultaneous and Sequential Proccessing». Contemporary Educational Psychology*. 7, págs. 371-383.

Lingoes, J. C. L.:1963, «*Multiple Scalogram Analysis». Educational and Psychological Mesurement*», XXIII. Págs 501-523

Macarow, L. :1972, «*Mathematical Induction». School Science and Mathematics* V. 72, N 7, págs. 647-648.

Malcom, P.S.:1974, «*The Well-Ordering Property as an Alternative to Mathematical Induction*» *School science and Mathematics*. V. 74/4, Apr. págs. 277-279.

Martinez Arias, R.; Rivas, M. T.:1991, «*Análisis de Escalas Acumuladas: Modelo probabilístico de Mokken para ítems dicotómicos». Psicotema*, Vol 3, nº 1, págs. 199-218.

Mayer, R. E.:1981, «*The promise of cognitive psychology*» Freeman & Company. (Trad. cast. de Antonio Maldonado Rico: «*El futuro de la psicología cognitiva*». Madrid. Alianza Universidad 1985).

Mayer, R.E.:1983, «*Thinking, Problem Solving, Cognition*». Nueva York: Freeman and Company. (Trad. cast. de Graziella *Baravalle* «*Pensamiento, resolución de problemas y cognición*». Barcelona: Paidós 1986)

Mill, J. S.:1843, «*System of Logic*». Londres. (Traducción castellana de eduardo Ovejero y Maury: «*Sistema de Lógica Inductiva y Deductiva*» Madrid: Daniel Jorro Editor. 1917)

Moreno, M. & Sastre, G.:1983, «*Aprendizaje y desarrollo intelectual*». México. Gedisa.

Neubert, G.A. and Binko, B.:1992, "*Inductive Reasoning in the Secundary classroom*". Washington, D.C. National Education Association of the United Stade.

Nickerson, R. S.:1985, ¨*The teaching of the thinking*» Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associetes. (Trad. cast. de L. Romano y C. Ginard: «*Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual*». Barcelona: Paidós 1987).

Oléron, P.,1967, «*Las actividades intelectuales*». En Trité de Psychologie Expérimentale (VII) L'Intelligence. Presses Universitaire de France. (Trad. cast. de Victor Fichman. «*Tratado de psicología experimental-VII La Inteligencia*». Barcelona. Paidós. 1983)

Ortiz, A.:1993, «*Series numéricas y razonamiento inductivo*» Epsilon. nº 27. págs. 95-96.

Ortiz, A.:1993, «*Series numéricas y razonamiento inductivo*». Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada

Ortiz, A.:1994, «*Numerical Series and Inductive Reasoning*». First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education. Modena (Italy). Edited by Nicolina A. Malara and Luis Rico. Págs. 67-72.

Ortiz, A.: 1997, "Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en educación primaria". Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Peirce, C. S.:1901-1910, «*The collected papers of Charles Sanders Peirce*». Hardvard Cambridg University Press. 1965. (Trad. cast. de José Vericat: «El hombre, un signo». Barcelona. Critica. 1988).

Peirce, C. S.:1867, «*On the Natural Classification of arguments*», *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, vol. 7 p.p. 284-312. (Trad. cast. de Pilar Castrillo Criado: «Escritos lógicos». Madrid. Alianza. 1988).

Peirce, C. S.:1878), "*Popular Science Monthly, XII y XIII*" (Trad. cast. de Juan Martin Werner. « *Deducción, Inducción e Hipotesis*». Buenos Aires. Aguilar. 1970)

Piaget J. & Morf, A.:1970, «*Estructuralismo y psicología*». Buenos Aires. Nueva Visión.

Piaget, J.:1953, «*La genese de l'idée de hasard chez l'enfant*». Paris. P.U.F..

Piaget, J.:1979, «*Naturaleza y Métodos de la Epistemología*». Madrid. Paidós.

Piaget, J.:1956, «*Régularités Sériales et Proportions*». En «*Epistémologie et psychologie de la Fonction*». Paris. Dunod.

Piaget, J.:1967, «*Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*». Neuchatel: Delachaux & Niestlé. (Trad. cast. de M. Riani: «*El juicio y el razonamiento en el niño*». Buenos Aires. Guadalupe. 1977)

Piaget, J.:1971, «*Essai de logique opératoire*». París. Dunod (Trad. cast. de Morales M. R.: «*Ensayo de lógica operatoria*». Buenos Aires. Guadalupe. 1977).

Piaget, J.:1974, «*La prise de conscience*». Paris. Presses Universitaire de France. (Traducción castellana: «*La toma de conciencia*». Madrid. Morata. 1981).

Piaget, J.:1985, «*Introducción a la epistemología genética*». Tomo 1. "*El pensamiento matemático*". México. Paidós.

Piaget, J. y otros.:1980, «*Recherches sur les correspondances*» (E.E.G. XXXVII). Paris. Presses Universitaire de France. (Traducción castellana «*Investigaciones sobre las correspondencias*». Madrid. Alianza Editorial. 1982).

Piaget, J., Szeminska, A.:1964, «*Le genèse du Nombre chez l'enfant*". Editions Delachaucx et Niestlé. Neuchatel (Suisse). (Tradución castellana de Sara Vassallo: «*Genesis del número en el niño*». Buenos Aires. Guadalupe. 1982)

Piaget, J.; García, R.:1989: «*Implicaciones y significaciones aritméticas*» en «*Hacia una lógica de significaciones*». Barcelona. Gedisa. Págs. 47-58

Pinker, A.:1976, «*Induction and Well Ordering*». *School Science and Mathematics*. V. 76/3, Mar., págs. 207-214.

Pirie, S.:1989, «*Through the recursive eye: Mathematical unthertanding as a dynamic phenomenon*» *Psychology of Mathematics Education*. Actes de la 13º conference internationale P.M.E. 13. Vol. 3, págs. 119-126.

Poincare H.:1902, «*La science et l'hipothèse*». (Trad. cast. de Besio A.B. y Banfi J.»*La ciencia y la hipótesis*» Madrid. Espasa-Calpe 1963).

Polya, G.:1944, «*How to solvet it*». Princeton: University Press. (Trad. Cast.: «*Cómo plantear y resolver problemas*». México. Trillas. 1985).

Polya, G.:1953, «*Mathematics and Plausible Reasoning*». New Jersey. Princeton University Press. (Trad. Cast. de Abellan, J. L: «*Matemáticas y Razonamiento Plausible*». Madrid. Técnos. 1966).

Polya, G.:1962-1964, «*Mathematical Discovery*». New York. Jhon Wiley and Sons.

Popper, K. R.:1934, «*The Logic of Scientific Discovery*». Londres. Hutchinson. (Traducción castellana de Sanchez de Zavala: «*La lógica de la investigación científica*». Madrid. Tecnos. 1985).

Popper, K. R.:1972, «*Objetive Knowledge*». Oxford. The Clarendon Pressxfoll. (Traducción castellana de Carlos Solis: «*Conocimiento objetivo*». Madrid. Tecnos. 1974)

Rico, L.:1997, «*Fundamentos teóricos para el currículum de matemáticas en secundaria*». Madrid. Sintesis. Rico editor.

Rico, L.:1997, «*Reflexiones sobre los fines de la Educación Matemática*» Suma . N. 24, Págs. 5-19

Ropo, E.:1987, «*Skills for Learning: A Review of Studies on inductive Reasoning*». *Scandinavian Journal of Educational Reseaach*. V. 31, nº 1, Págs. 31-39.

Ross, L.:1982, «*The establisment of social games among toddleis*». *Developmental and Memory*, 18, págs. 509-518. Referenciado en Nickerson, R. S. (1985).

Ross, L.:1981, «*The teaching of the thinking*». Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associetes. Referenciado en Nickerson, R. S. (1985).

Runkle, S. & Tansey, P.:1976*,* «*Logic: A United for 4-8 Graders, Especially Gifted and Talented*». For related document, see 162, 443- 448 Guides-Classroom Use-guides (for Teachers). (144 págs.)

Russell, B:1912, «*Problems of philosophy*». Oxford. University Press. (Trad. cast. de J. Xirau: «*Los problemas de la filosofía*». Barcelona. Labor 1988).

Salmon, W. C.:1968, «*Who needs inductive acceptance rules*?»*.* In «*The problem of inductive logic*». Imre Lakatos (ED), 139-144. Amsterdam. Noth-Holland.

Sastre, G. & Moreno, M.:1980, «*Descubrimiento y construcción de conocimientos*». Barcelona. Gedisa.

Shannon, K.M. and Austin, H.M.:1992, "A *problem to foster critical thinking in mathematics*" . *International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology*. Vol. 23; Nº 4. Pág. 543-547.

Sijtsma,K. and Verweij, Anton C.:1999, "*Knowledge of Solution Strategies and IRT Modeling of Items for Transitive Reasonoing*"*. Applied Psychological Measurement,* Vol. 23 Nº 1, March 1999, 55-68. Sage publications. Inc.

Schwartz, D. & Black, J.:1990, «*The Induction of Rules fron Analog, Mental Models*». *Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Boston. (29 págs).

Suchman, E. R.:1950, «*The scalogram board technique for scale analysis*»*.* Págs. 91-121. En Stouffer y col.: «»*. Measurement and Prediction*. Vol. 4, Princeton University Press. Studies in social phychology in world war II

Shye, S.:1988, «*Inductive and Deductive Reasoning: Astructural Reanalysis of Ability Tests*»*. Journal of Aplied Psychology*. Vol. 73, N 2, págs. 308-311.

Sloane, N. J. A.:1973, «*A handbook of integer sequences*». San Diego. Academic Press.

Steffe, L. P.:1988, «*Children's Construction of Numbers Sequences and Multiplyng Schemes*».

Stegmüller, W.:1970, «*Probleme und Resultate der Wissenschafstheorie und Analytischen Pilosofhie Band II: Theorie und Erfahrung*». Heidelberg. Springer-Verlag. (Traducción castellana: « *Teoría y experiencia*». Barcelona. Ariel 1979).

Sternberg, R. J.:1982, «*Selection and Implementation of Strategies in Reasoning by Analogy. Journal of Educational Psychology*. Vol 74, N 3. Págs. 399-413.

Sternberg, R. J.:1986, «*Beyond IQA Triarchic theory of human intelligence*». Cambridge: University Press. (Trad. cast. de Bordas López M.T: «*Más alla del cociente intelectual*». Bilbao. Desclee de Bouwer. 1990).

Sternberg, R. J.:1989, «*If dancers ate their shoes: Inductive reasoning with factual and counterfactual premises*». Memory & Cognition 17(1), págs. 1-10.

Sternberg, R. J.:1983, «*Unities in Inductive Reasoning*». *Journal of Experimental Psychology*. General. Vol. 112, N 1, págs. 80-116.

Summers, G. F.:1982, «*Medición de actitudes*». México. Trillas

Toby, J. y Toby, M.L.,1954, «*A method of selecting dichoto mous items by cross tabulation*». En Riley,M. y col. «*Sociological Studies in Scale Analisis*». New Brunsvick, New Jersey. University Press.

Tomic,W. and Kingma,J.:1996, "*On the relation Between Seration and NumberLine Comprehension: A Validation Stud". Corporate Source: The Open University*. P.O. box 2960. 6401 DL Herlen the Nedherlands

Trigg, C. W.:1989, «*Polygonal Repdigits*». *Journal of Recreational Mathematics*». Vol. 21 N. 1. Págs.52-53.

Vanlehn, K.:1986, «*Arithmetic Procedures are Induced from Examples*» En *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of Mathematics*. London: Lawrence Erlbaun Associetes. James Hiebert (Edit).

Vergnaud, G.:1980, «*Problemática y metodología de la investigación en Didactica de la Matemática*». En «*Métodos de observación y análisis de los procesos educativos*». Materiales del IX Seminario de Investigación psicopedagógica. Barcelona. Coordinador César Coll.

Vergnaud, G.:1990, «*Epistemology and Psychology of Mathemattcs Education*». I.C.M.E. Study Series. Mathemathics and Cognition. Cambrige. University Press.

Wheatley, G. H.:1991, «*Constructivist Perpectives on Science and Mathematics Learning*». *Science Educatión*, 75 (1), págs. 9-21.

Wiscamb, M.:1970, «*A geometric introduction to mathematical induction*». *Mathematics Teacher.* V. 63, N. 5, págs 402-404.

Word, K. J.:1988, «*Instructional sequence effects of recursión and Mathematical Inductión in college algebra*». Masthers Thesis. University of Texas at Austin. Michigan. U.M.I.

Paneles

Coordinador
Dr. Juan Díaz Godino, Universidad de Granada.

Panel 1

Grupo de trabajo Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.

Ponencia:
Perspectiva de la investigación del grupo de trabajo
"Didáctica de la probabilidad, estadística y combinatoria".

Dra. M. Jesús Cañizares Castellanos
Universidad de Granada
Dr. Antonio Estepa
Universidad de Jaén
Dra. Carmen Batanero
Universidad de Granada

Panel 2

Grupo de trabajo Didáctica de la Matemática como disciplina científica.

Ponencia
Perspectiva de la investigación del grupo
«Didáctica de las matemáticas como disciplina científica»

Dra. Luisa Ruiz
Universidad de Jaén
Dra. Pilar Orús
Universidad Jaume I de Castellón
Dr. Juan D. Godino
Universidad de Granada
Dr. Josep Gascón
Universitat Autónoma de Barcelona

Perspectiva de la investigación del grupo de trabajo "Didáctica de la probabilidad, estadística y combinatoria"

M. Jesús Cañizares Castellanos
Universidad de Granada
Antonio Estepa
Universidad de Jaén
Carmen Batanero
Universidad de Granada

1. INTRODUCCIÓN

Un objetivo de la SEIEM es promover las actividades de investigación y los grupos de investigación juegan un papel muy importante a este respecto. En este panel daremos a conocer el trabajo realizado por nuestro grupo, situándolo dentro de la investigación en educación estadística a nivel internacional, con el fin de compartirlo con otros grupos de la sociedad y abrir la posibilidad de futuras colaboraciones con ellos.

El interés reciente por la enseñanza de la estadística ha sido impulsado por el crecimiento de sus aplicaciones y la difusión de los ordenadores que resuelven el problema del cálculo. Al facilitarse su uso, la estadística se ha incorporado, en forma generalizada, al currículo de la enseñanza primaria y secundaria y de las diferentes especialidades universitarias, debido a su carácter instrumental, y a la importancia del razonamiento estadístico en la sociedad de la información. Esto ha originado una serie de problemas didácticos a los que la investigación trata de responder, desde la educación matemática, la psicología, y la propia estadística.

La investigación sobre la didáctica de la estadística es aún escasa, y no se conocen bien las principales dificultades de los alumnos en muchos conceptos importantes. Sería también preciso evaluar métodos de enseñanza adaptados a la naturaleza de la estadística, a la que no siempre se pueden transferir los principios generales de la enseñanza de las matemáticas, porque se contrapone a la cultura determinista de la clase de matemáticas, y por las controversias filosóficas, éticas y políticas implicadas en el uso e interpretación de la estadística.

2. ORÍGENES Y COMPONENTES DEL GRUPO

El grupo de Estadística, Probabilidad y Combinatoria se creó formalmente durante la reunión de constitución de la Sociedad, aunque la mayoría de sus miembros actuales trabajaban ya en esta línea de investigación. En 1985 se estableció un grupo sobre el tema en Jaén, que se trasladó posteriormente a Granada y se consolidó con el Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática en el año 1988. En otras Universidades como Cádiz, La Laguna, Autónoma de Madrid y Murcia también trabajaban en el tema personas aisladas o pequeños grupos.

La coordinación fue iniciada por Carmen Batanero (Universidad de Granada) y a partir de 1997 se hizo cargo de ésta Antonio Estepa (Universidad de Jaén). Los componentes actuales del grupo son César Sáenz (Universidad Autónoma de Madrid), Pilar Azcárate (Universidad de Cádiz), Carmen Batanero, M. Jesús Cañizares, Jose María Cardeñoso, Juan D. Godino, Virginia Navarro-Pelayo, Juan Jesús Ortiz, Luis Serrano y Angustias Vallecillos (Universidad de Granada), Antonio Estepa y Francisco T. Sánchez- Cobo (Universidad de Jaén), Candelaria Espinel (Universidad de La Laguna) y Andrés Nortes (Universidad de Murcia).

El grupo se ha reunido en Zamora y Valladolid y se han organizado encuentros parciales en Granada y Jaén, con ocasión de los cursos de doctorado o de la presencia de profesores visitantes.

3. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Los trabajos desarrollados hasta la fecha pueden clasificarse en las siguientes líneas de investigación:

3.1. Evaluación del razonamiento probabilístico

Mientras que hasta hace unos años, la enseñanza de la probabilidad se iniciaba a los 14-15 años, enfatizando el cálculo combinatorio, los currículos actuales adelantan la materia al comienzo de la educación secundaria obligatoria e incluso a la enseñanza primaria. Sugieren utilizar actividades donde el estudiante haga predicciones sobre los diferentes resultados en experimentos aleatorios sencillos, luego obtenga datos empíricos, y finalmente compare las probabilidades experimentales con sus predicciones. Este cambio requiere una labor de evaluación de las capacidades de los alumnos, como las llevadas a cabo sobre los siguientes conceptos: aleatoriedad (Serrano, 1996; Batanero, Serrano y Green, 1998; Batanero y Serrano, 1999); comparación de probabilidades (Cantero, 1998; Cañizares, 1997; Cañizares y cols., 1997), noción de juego equitativo (Cañizares y cols., 1999), concepción frecuencial de la probabilidad (Serrano y cols., 1996) y uso de heurísticas (Serrano y cols., 1998;). Sáenz (1995; 1998) realiza un experimento de enseñanza que tiene en cuenta las concepciones previas de los estudiantes para potenciar un cambio conceptual.

3.2. Razonamiento combinatorio

Las operaciones combinatorias pueden definirse mediante experimentos aleatorios (extracción con o sin reemplazamiento, ordenada o no ordenada) y, recíprocamente, la enumeración del espacio muestral de todo experimento compuesto requiere la resolución de un problema combinatorio. Piaget sostiene que la comprensión del azar pasa por la de las operaciones combinatorias, que son un componente fundamental de pensamiento formal. Esto nos ha llevado a evaluar el razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria (Navarro-Pelayo, 1994; Batanero, Godino, y Navarro-Pelayo, 1994; Batanero, Navarro-Pelayo y Godino, 1997) y universitarios (Roa y cols., 1996; Roa, 2000).

3.3. Análisis exploratorio de datos

El análisis exploratorio de datos se introduce en los nuevos currículos desde la enseñanza secundaria. Pero este tipo de análisis se basa en los estadísticos de orden, que no siempre son bien comprendidos por los alumnos (Cobo, 1998). Los conceptos estadísticos aparentemente sencillos presentan dificultades variadas a los estudiantes (Batanero, Godino, Green, Holmes, y Vallecillos, 1994).

Un tema extensamente investigado por miembros del grupo es la comprensión de la asociación estadística (Estepa, 1993; Batanero, Estepa, Godino, y Green, 1996; Estepa y Batanero, 1996; Estepa, Batanero y Sánchez, 1999) y su evolución tras la enseñanza, tanto en cursos tradicionales (Sánchez, 1999) como en los basados en el uso de ordenadores (Batanero, Estepa, y Godino, 1997; 1998).

3.4. Formación y concepciones de los profesores

La formación de los profesores en este ámbito es prácticamente inexistente. Sólo recientemente se ha iniciado una asignatura de didáctica de la estadística en la Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas de la Universidad de Granada. Los alumnos de la Licenciatura de Matemáticas no tienen una formación especifica en didáctica de la estadística, y la mayoría de profesores de primaria, no ha tenido una formación básica ni siquiera en estadística. El estudio de las concepciones de los profesores de educación primaria sobre aleatoriedad y probabilidad es abordado por Azcárate (1995; 1996), Azcárate y Cardeñoso (1995) y Cardeñoso (1998).

3.5. Análisis de libros de texto y el currículo

Los libros de texto son un material didáctico fundamental, aunque en ocasiones transmiten significados incompletos o sesgados de los conceptos que tratan de enseñar; el análisis de los libros de texto puede ayudarnos a detectar estos desajustes. Esta problemática es abordada por Ortiz (1999; Ortiz y cols., 1996; 2000), Sánchez (1999) y Serradó (2000). Azcárate y Cardeñoso (1996) y Cardeñoso y Azcárate (1995) analizan el componente estocástico de los proyectos y materiales curriculares.

3.6. Inferencia estadística

La estadística es una de las ciencias metodológicas fundamentales y base del método científico experimental. Pero la investigación didáctica ha puesto de manifiesto dificultades y errores en su aplicación, hasta el punto que algunas sociedades profesionales aconsejan prescindir del contraste de hipótesis y otros procedimientos estadísticos. Esta temática es recogida por Vallecillos (Vallecillos, 1994; 1995a y b; 1996; 1997; Vallecillos y Batanero, 1997). La «*educación estadística y la controversia sobre los tests de hipótesis*» fue el tema de una sesión en la 52 Reunión del ISI, 1999, donde Angustias Vallecillos presentó un trabajo invitado (Vallecillos, 1999) y este año se celebra la *IASE Round Table Conference* sobre *la formación de investigadores en el uso de la estadística* en Tokio, organizada por Carmen Batanero.

4. ACTIVIDAD DESARROLLADA

En el anexo presentamos las tesis doctorales elaboradas por miembros del grupo de investigación, que han participado también en proyectos financiados por el Programa de Promoción General del Conocimiento (DGICYT), Acciones integradas Hispano-Británicas e Hispano-Italianas, Proyecto Europeo Tempus Phare, Convenio de Colaboración Científica con Iberoamérica, junto con la Universidad de Oriente en Santiago de Cuba y Plan Andaluz de Investigación.

Hay una tradición de participación en Congresos Internacionales, destacando ICOTS 1994, 1998; PME 1990 a 1999; ICME 1992 y 1996; I y II CIBEM; 51ª y 52º Sesión del ISI 1997, 1999; *Round Table Conference* de IASE 1996, 2000; *International Conference on Teaching in Mahematics* celebrados en Samos, Grecia, en 1998 e *International Conference on «Mathematics for Living»*, celebrado este mismo año en Amman. El grupo ha participado también en las Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas, Granada, y Jornadas de Educación Matemática Thales, JAEM y Simposio de la SEIEM y en Programas de Doctorado de las Universidades de Almería, Cádiz, Granada y Jaén, así como en cursos de doctorado y maestría en universidades sudamericanas.

Hemos recibido las visitas de trabajo de los siguientes profesores (Universidad de Granada): Herman Callaert, Limburgs University, Bélgica; Ernesto Alonso Sánchez, CINVESTAT, México; Oscar Soto, Universidad Nacional de Colombia; Grisel Alvarez, Universidad de Santiago de Cuba; Roberto Meyer, Universidad Nacional del Litoral, Argentina; y Carolina Carvalho, Universidad de Lisboa.

El grupo de Granada está organizando la información sobre su trabajo en una página Web (http://www.ugr.es/~batanero), que incluye enlaces a otros grupos en educación estadística.

5. TRABAJOS EN CURSO

Entre los trabajos actualmente en curso, citaremos los siguientes:

5.1. Comprensión de promedios

Mientras que las concepciones probabilísticas han sido estudiadas extensamente, hay pocos trabajos sobre las concepciones estadísticas. Belén Cobo estudia el significado que los alumnos de secundaria atribuyen a los promedios, en relación a los campos de problemas, procedimientos de resolución, representaciones utilizadas, propiedades asignadas y modos de argumentación.

5.2. El paso del análisis de datos a la inferencia

Uno de los problemas principales en un curso introductorio de estadística es hacer la transición del análisis de datos a la inferencia, debido a la escasez del tiempo disponible y a los conocimientos previos. En la investigación de Tauber se pretende diseñar y evaluar una secuencia de enseñanza de la distribución normal, en un curso de análisis de datos basado en ordenadores, dirigido a estudiantes universitarios que no hayan estudiado estadística durante la educación secundaria. Antonio Moreno trabaja sobre enseñanza y aprendizaje de la estadística inferencial en el nivel de secundaria y recoge diversos aspectos sobre análisis curricular, investigaciones y experiencias de enseñanza sobre el tema y la descripción de una actividad llevada a cabo por el autor en clase con el fin de estudiar también el aprendizaje de conceptos inferenciales por alumnos de este nivel de enseñanza.

5.3. Desarrollo de la práctica profesional

La intervención en el aula como parte de la práctica profesional de los profesores del área puede estar influida, además de por las concepciones de los propios profesores, por otras muchas variables. Serradó lleva a cabo un estudio de casos sobre la implementación y desarrollo de la práctica de los profesores acerca del conocimiento estocástico, tomando como punto de partida los resultados de Serradó (2000) sobre la estructura didáctica y metodológica junto con el análisis de la tipología de conocimientos estocásticos propuestos por las editoriales seleccionadas.

6. INTEGRACIÓN EN OTROS GRUPOS INTERNACIONALES

Pensamos que esta presentación no estaría completa sin inscribir este trabajo dentro de una panorámica internacional. El interés por la enseñanza de la estadística no es exclusivo de la educación matemática, sino que es compartido por la estadística y la psicología. Haremos un breve resumen de la contribución de nuestro grupo en PME e IASE.

6.1. El grupo de estocástica de PME

Los estudios sobre razonamiento estocástico en Psicología se deben a la nueva concepción del hombre como un decisor dotado de un sistema probabilístico complejo, en lugar de considerarlo con un pensamiento acorde con la lógica formal como se hacía en épocas pretéritas. Entre los múltiples trabajos que existen, podemos destacar los más utilizados en Educación Estocástica, entre los que se encuentran los trabajos de Kahneman y cols. (1982), que introducen el concepto de *heurística* o estrategia inconsciente que reduce la complejidad de un problema probabilístico, suprimiendo parte de la información, y los estudios de Piaget e Inhelder (1951), sobre el desarrollo de las nociones de aleatoriedad y probabilidad en el niño. Mención especial merecen los trabajos de Fischbein (1975), que apoyan la conveniencia de adelantar la educación estocástica, mostrando que sin instrucción es difícil que se desarrolle un razonamiento estocástico adecuado.

Fischbein fue el fundador del *PME (Psychology of Mathematics Education),* en la actualidad el principal foro de investigadores en educación matemática, donde, en cada Conferencia anual, se presentan trabajos de las distintas líneas de investigación. Nuestro grupo viene participando en PME desde 1990, tanto presentando trabajos de investigación, en sus distintas modalidades (research forum, research report, …), como revisando los trabajos para cada Conferencia anual. En 1994 se formó un grupo de trabajo sobre Educación Estocástica, en cuya labor participan miembros de nuestro grupo, así como en tareas de coordinación de 1996 a 1998.

6.2. La Sociedad Internacional de Educación Estadística (IASE)

La educación estadística ha sido un foco de interés del *Instituto Internacional de Estadística* (ISI) desde su fundación en 1885, que se concretó oficialmente en 1948, cuando se establece el *Comité de Educación*, que se responsabiliza del desarrollo de licenciaturas en estadística, los *Centros Internacionales de Educación Estadística*, la producción de libros de texto universitarios y diccionarios de términos estadísticos. El comité inició también los *ICOTS (International Conference on Statistical Education)* en 1982, las *Round Table Conference,* y la revista *Teaching Statistics* dirigida a los profesores (21 años de existencia).

En 1991 el *ISI* crea una nueva sección, a la que se transferirían los objetivos del Comité de Educación. Nace así *IASE (International Association for Statistical*

Education, http://www.stat.ncsu.edu/info/iase/*),* que cuenta con unos 500 miembros, y tiene un triple objetivo:

Como organización profesional, proporciona un foro de discusión a los educadores estadísticos;

Como sociedad de investigación, trata de crear una disciplina autónoma;

Toma el liderato en las cuestiones sobre educación estadística, especialmente en los países en desarrollo.

Entre las responsabilidades asumidas, se encuentran la organización de *ICOTS* y *Round Table Conference* y la colaboración con otras conferencias internacionales sobre educación estadística, promueve libros, como *The Assessment Challenge in Statistics Education* (Gal y Garfield, 1997) y coordina el *World Numeracy Project.*

Miembros del grupo pertenecen a *IASE*, participan en sus conferencias y colaboran activamente con la sociedad. Desde Granada se ha coordinado desde 1996 el *International Study Group on Learning and Teaching Statistics and Probability,* que en el año 2000 se ha integrado en IASE con el nombre *IASE Statistical Education Research Group y* se edita la *IASE Statistical Education Research Newsletter* (http://www.ugr.es/local/batanero/sergroup.htm). Se organizó en 1996 la *IASE Round Table Conference y se* participa en el comité ejecutivo.

7. PERSPECTIVAS DE FUTURO

El grupo se propone potenciar la investigación en esta línea, así como la difusión y aplicación de los resultados de investigación. Para lograr estas metas, siguen siendo válidos los objetivos propuestos en la reunión de Zamora:

- Coordinar y desarrollar una agenda de investigación para los próximos años que incluya la selección de problemas, temas y metodología de investigación relevantes; construcción de instrumentos de evaluación propios; diseño y desarrollo de experimentos de enseñanza; análisis curricular y el diseño de programas de formación para profesores de enseñanza no universitaria de contenido estocástico y didáctico.
- Difundir nuestros trabajos entre los profesores y preparar material de apoyo para el aula continuando la labor iniciada por Nortes Checa (1977, 1987), Godino y cols. (1988); Batanero y cols. (1994) y Sáenz (1999).
- Continuar las relaciones internacionales y potenciarlas, especialmente con Hispanoamérica.
- Contribuir al establecimiento de relaciones entre las diversas áreas en las que se lleva a cabo la investigación en Educación estadística, particularmente entre la Estadística y la Didáctica de la Matemática.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (1996). El conocimiento profesional relativo al tratamiento del conocimiento probabilístico en la educación primaria. *Uno,* 7, 95-108.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (1995). The notion of randomness in future primary school teachers. En J. B. Garfield (Ed.), *Papers of the IV International Conference on Teaching Statistics,* Minneápolis: Universidad de Minnesota.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (1996). El lenguaje del azar: Una visión fenomenológica sobre los juicios probabilísticos. *Epsilon,* 35, 165-178.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27(2), 151-169.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Students' learning of statistical association in a computer environment. En J. Garfield and G. Burrill (Eds.), *Research on teaching statistics and new technologies* (pp. 191-206).Voorburg: International Statistical Institute.

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1998). Building the meaning of statistical association trough data analysis activities. Research Forum. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Procedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1, 221-236). University of Stellembosch.

Batanero, C., Godino, J. Green, D. Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errors and difficulties in understanding statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 25(4), 527-547.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1997). Assessing combinatorial reasoning. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. e I.O.S. Press.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics,* 32, 181-199.

Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(5), 558-567.

Batanero, C., Serrano, L. y Green, D. R. (1998). Randomness, its meanings and implications for teaching probability. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 29 (1), 113-123.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L., y Ortiz, J. J. (1997). Subjective elements in children's comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed). *Proceedings of the 21st Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 49-56). Lahti.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. *J.* (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números,*37, 37-55.

Cantero, A. (1998). *Razonamientos probabilísticos de alumnos de 12 años en tareas de comparación de probabilidades.* Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Cardeñoso, J. M. y Azcárate, P. (1995). Tratamiento del conocimiento probabilístico en los proyectos y materiales curriculares. *Suma,* 20, 41-52.

Cobo, B. (1998). *Estadísticos de orden en la enseñanza secundaria.* Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Estepa, A. y Batanero, C. (1996). Judgements of correlation in scatter plots: Students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* 4, 21-41.

Estepa, A., Batanero, C. y Sánchez, F. T. (1999). Judgments of association in the comparison of two samples: students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* 7, 17-30.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Gal, I, y Garfield, J (Eds.) (1997). *The assessment challenge in statistics education*. The Netherland: IOS Press, The International Statistical Institute.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988): *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases.* Cambridge: Cambridge University Press.

Nortes Checa, A. (1977). *Estadística teórica y aplicada.* Murcia: H. S. R.

Nortes Checa, A. (1987). *Encuestas y precios.* Madrid: Síntesis.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (1996). Las frecuencias relativas en los textos de Bachillerato. *EMA,* 2(1), 29-48.

Ortiz, J. J., Serrano, L. y Cañizares, M. J. (2000). Variables de tarea en los ejercicios de probabilidad en los libros de texto. *Encontro sobre Ensino e Aprendizagem da Estatística*. Sociedad Portuguesa de Estatística, Lisboa, En prensa.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (1996). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, 36, 433-446.

Sáenz, C. (1998). Teaching probability for conceptual change. *Educational Studies in Mathematics,* 35(3), 233-254.

Sáenz, C. (1999). *Materiales para la enseñanza de la teoría de las probabilidades.* Madrid: ICE de la Universidad Autónoma.

Serradó, A. (2000). *Diseño de las unidades didácticas dedicadas al tratamiento del azar en los libros de texto de Educación Secundaria obligatoria.* Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Cádiz.

Serrano, L., Batanero C. y Ortiz, J. J (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de Bachillerato. *SUMA*, 22, 43-50.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (1998). Un estudio componencial de heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 10(1). 7-25.

Vallecillos, A. (1995a). Consideraciones epistemológicas sobre la inferencia estadística: implicaciones para la práctica docente. *UNO,* 5, 80-90.

Vallecillos, A. (1995b). Comprensión de la lógica del contraste de hipótesis en estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15(3), 53-81.

Vallecillos, A. (1996). Students' conceptions of the logic of hypothesis testing. *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* 4, 43-61.

Vallecillos, A. (1997). El papel de las hipótesis estadísticas en los contrastes: concepciones y dificultades de aprendizaje. *Educación Matemática,* 9(2), 5-20.

Vallecillos, A. & Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17(1), 29-48.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidences on learning difficulties about testing hypotheses. *Proceedings of the ISI 52 Session,* Helsinki. ISI.

TESIS DOCTORALES SOBRE EDUCACIÓN ESTADÍSTICA REALIZADAS O DIRIGIDAS POR MIEMBROS DEL GRUPO

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria.* Universidad de Cádiz.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de crencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Universidad de Granada.

Cardeñoso, J. M. (1998). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad.* Universidad de Cádiz.

Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Universidad de Granada.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.* Universidad de Granada.

Ortiz, J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato.* Universidad de Granada.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada.* Universidad de Granada.

Sáenz, C. (1995). *Intuición y matemática en el razonamiento y aprendizaje probabilístico.* Universidad Autónoma de Madrid.

Sánchez, F. (1999) *Significado de la regresión y correlación para estudiantes universitarios.* Universidad de Granada.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de conceptos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad.* Universidad de Granada.

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios*. Universidad de Granada.

Perspectiva de la investigación del "grupo didáctica de las matemáticas como disciplina científica"

Luisa Ruiz
Universidad de Jaén
Pilar Orús
Universidad Jaume I de Castellón
Juan D. Godino
Universidad de Granada
Josep Gascón
Universitat Autónoma de Barcelona

RESUMEN

En este trabajo se sintetizan las actividades de investigación realizadas por el grupo «Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica» (DMDC) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Se incluyen las actividades previas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM), dado que éste debe ser considerado como el germen de dicho grupo. La perspectiva histórica adoptada se complementa con la exposición de los presupuestos básicos subyacentes a la gran mayoría de investigaciones llevadas a cabo por los miembros del grupo y concluye con la descripción de una agenda de investigación, actualmente en marcha, concretada en varios proyectos específicos y un proyecto coordinado.

1. ANTECEDENTES DEL GRUPO: EL SEMINARIO INTERUNIVERSITARIO SIIDM

El grupo de investigación denominado «Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica» (DMDC) se constituyó en el seno de la SEIEM en 1998. Sus actividades deben ser consideradas como una continuación y extensión de las iniciadas en 1991 por el Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM) formado por unos 30 profesores pertenecientes a 15 universidades. Es por esta razón que la perspectiva que presentamos en este trabajo abarca un periodo que se inicia en noviembre de 1991, fecha de constitución del SIIDM. El grupo DMDC se propone potenciar las actividades del SIIDM y coordinarlas con los objetivos de la SEIEM y de los restantes grupos de investigación de dicha Sociedad.

1.1. Objetivos iniciales del SIIDM

Los objetivos formulados inicialmente por el SIIDM y asumidos por el grupo DMDC son los siguientes:

(a) Estudiar los trabajos relevantes sobre los fundamentos teóricos de la didáctica de las matemáticas, teniendo en cuenta las distintas aportaciones de otras disciplinas: matemáticas, epistemología, semiótica, pedagogía, psicología y sociología.

(b) Analizar y confrontar las nociones básicas de las teorías de los campos conceptuales, de las situaciones didácticas, antropológica y de las funciones semióticas.

(c) Aplicar dichas teorías a problemas específicos de investigación didáctica. Estudiar la eficacia respectiva de cada una de ellas para identificar (y, en su caso, explicar) los fenómenos didácticos emergentes así como para producir recursos didácticos tanto en el ámbito curricular como en el de la formación del profesorado de matemáticas.

(d) Identificar los elementos básicos de una aproximación integradora de los distintos enfoques que permita formular una agenda de investigación coherente y productiva en didáctica de las matemáticas.

1.2. Constitución y estructura del grupo DMDC

En el momento de constitución del grupo DMDC manifestaron su deseo de formar parte del mismo 14 miembros de la SEIEM. El grupo se estructura en diferentes subgrupos que tienen su sede en las diversas universidades a las que pertenecen los miembros del grupo y que constituyen las células básicas de trabajo. Cada uno de estos subgrupos tiene sus propios proyectos (con frecuencia parcialmente compartidos por otros subgrupos) y sus propias sesiones periódicas de trabajo. Existen, asimismo, seminarios en los que participan miembros de dos o más de dichos subgrupos, además de las Jornadas SIIDM anuales en las que participan todos los miembros del grupo junto a los investigadores que lo deseen.

Recientemente se ha ido delimitando un proyecto de investigación común, compartido por todos los subgrupos, que permite coordinar muchos de los proyectos parciales desarrollados por éstos.

2. PRESUPUESTOS BÁSICOS Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN DEL GRUPO DMDC

La mayor parte de los miembros del grupo comparten un interés común por el enfoque de investigación iniciado en la década de los 70 y que en ocasiones se ha denominado «didáctica fundamental». En 1986 Guy Brousseau, iniciador indiscutible de este nuevo enfoque, publica en RDM el resumen de su tesis con el título «Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática». En este trabajo Brousseau caracteriza la «epistemología experimental» distinguiéndola del llamado «enfoque clásico». Éste presupone que la actividad cognitiva del sujeto -el que aprende y/o el que enseña- es el factor central para explicar los hechos didácticos considerando, además, que dicha actividad puede ser descrita y explicada de manera relativamente independiente de la relación didáctica y de las matemáticas. La originalidad del nuevo enfoque propuesto por Brousseau consiste en situar las matemáticas como un componente esencial de los fenómenos didácticos, lo que constituye la primera ruptura con el enfoque clásico; la segunda ruptura proviene de la ambición de elaborar una ciencia experimental de estos fenómenos, lo que condujo a explicitar los modelos epistemológicos utilizados para contrastarlos con ayuda de los hechos didácticos. En la constitución inicial de este nuevo enfoque, junto a la teoría de las situaciones, jugó un papel muy relevante la teoría de los campos conceptuales propuesta inicialmente por Gerard Vergnaud. Posteriormente han aparecido otros modelos teóricos dentro de este enfoque de investigación que, en principio, pueden entrar en competición con la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1997) y con la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) (Vergnaud, 1991). Se trata de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1985 y 1992; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997 y Bosch y Chevallard, 1999) y la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS) (Godino y Batanero, 1994 y en prensa). La (in)compatibilidad de estas teorías, así como la posible complementariedad o redundancia de las mismas es un tema difícil, pero esencial. Se trata de definir el «núcleo firme» de un Programa de Investigación (en el sentido de Lakatos) que integre, en la medida de lo posible, los presupuestos básicos de estas teorías.

Consideramos que no es pertinente hablar de una «escuela francesa de didáctica de las matemáticas»: hay grupos en Francia que realizan investigaciones didácticas con orientaciones epistemológicas, cognitivas e instruccionales muy diferentes entre sí. Igualmente se pueden encontrar cada vez más grupos de investigadores de todos los países que asumen los problemas y los supuestos teórico-metodológicos de la línea de investigación iniciada por la TSD.

En el momento actual de desarrollo de la didáctica de las matemáticas no disponemos de un Programa de Investigación claramente definido y suficientemente compartido por la comunidad científica; nos encontramos en un estadio incipiente de desarrollo en que los grupos o equipos de investigación tienen todavía una excesiva dependencia geográfica y personal.

A pesar de lo dicho hasta aquí y de las importantes diferencias existentes entre los diversos modelos teóricos que se están desarrollando, los miembros de nuestro grupo creemos que es posible identificar algunos rasgos comunes entre las cuatro teorías antes citadas. Estas características comunes constituyen los presupuestos básicos mínimos que, provisionalmente, tomamos como postulados respecto al que podríamos denominar enfoque epistemológico en didáctica de las matemáticas:

- Propone modelos epistemológicos explícitos de la actividad matemática como puerta de entrada al estudio de los fenómenos didáctico-matemáticos. O, en otros términos, postula que la actividad matemática institucionalizada debe ser considerada como el objeto primario de investigación de la didáctica.
- Trata de identificar un núcleo de fenómenos y de cuestiones de investigación específicos de la didáctica de las matemáticas, irreductibles a problemas biológicos, lingüísticos, cognitivos, sociológicos o instruccionales.
- Elabora una organización teórica propia coherente con el modelo epistemológico adoptado que permita no sólo «construir» los fenómenos y los problemas didácticos, sino , además, dar cuenta de los aspectos cognitivo e instruccional. La contrastación empírica de estos modelos teóricos posibilitará el estudio «científico» de los fenómenos didácticos.
- De esta manera de interpretar la didáctica de las matemáticas y su objeto de estudio se desprende que las líneas de investigación de los diferentes equipos de trabajo del grupo DMDC no se definan por un contenido matemático específico, sino que se caracterizan utilizando las nociones que proporciona el modelo teórico específico que se pretende desarrollar y aplicar.

En nuestro grupo hay equipos que, por las razones que sea, trabajan de manera especial -aunque no exclusiva- en uno de los cuatro modelos teóricos mencionados anteriormente. Caracterizaremos, en primera instancia, la línea de investigación de cada equipo mediante el nombre de la teoría o teorías que utiliza de manera predominante, si bien será necesario, posteriormente, delimitar de manera más precisa la orientación de cada una de las investigaciones.

Algunos miembros del grupo están también interesados en seguir profundizando en el análisis epistemológico de los citados modelos teóricos, en su confrontación mutua y con otras teorías, por lo que habría que reconocer la existencia de una línea de investigación que podríamos describir como línea metadidáctica o, mejor, línea de epistemología de la didáctica de las matemáticas.

Para hacerse cargo de la posible adscripción de los trabajos de los miembros del grupo a cada una de las líneas de investigación citadas, puede consultarse la página web del grupo (http://www.ugr.es/local/jgodino/si-idm.htm). En ella aparecen los textos (completos o resumidos) correspondientes a más de 45 contribuciones presentadas y discutidas en las 14 reuniones del SIIDM desde su constitución en 1991. Los documentos se han publicado en 10 Boletines (uno por año de actividad) incorporados a la página web mencionada y, en muchos casos, han dado lugar posteriormente a publicaciones en revistas o presentaciones en congresos.

3. PROYECTOS EN LOS QUE PARTICIPAN MIEMBROS DEL GRUPO DMDC

En la actualidad se están desarrollando varios proyectos de investigación por los diferentes subgrupos así como un proyecto coordinado en el que participan todos ellos. Enumeraremos a continuación los proyectos específicos en que están trabajndo los distintos subgrupos. El detalle sobre la orientación, objetivos y estado actual de la investigación de cada uno de dichos proyectos se describe en una versión ampliada de este trabajo recuperable desde la página web citada (http://www.ugr.es/local/jgodino/si-idm.htm).

3.1. Equipo de Barcelona-Huesca-Vigo (línea antropológica)

Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad.
Coordinación: M. Bosch; Miembros: P. Bolea, J. Gascón, C. Fonseca y E. Barrabés.

3.2. Equipo de Castellón (línea teoría de las situaciones)

La actividad clasificatoria y el tratamiento de datos en la enseñanza obligatoria: Contenido procedimental e instrumento de negociación didáctica.
Coordinación: P. Orús; Miembros: T. Bort, F. Gracia, G. Lorenzo, Mª J. Peris y I. Pitarch.

3.3. Equipo de Córdoba (línea semiótica)

Desarrollo de un sistema de enseñanza y tutoría universitaria (aplicado a la Didáctica de las Matemáticas) por mediación de Internet.
Coordinación: A. Martínez Recio; Miembros: J. Cuesta y A. Rojas.

3.4. Equipo de Jaén-Madrid (línea antropológica)

Análisis y reconstrucción de organizaciones matemáticas y didácticas. El caso de la proporcionalidad de magnitudes en la Enseñanza Secundaria.
Coordinación: L. Ruíz Higueras; Miembros: F. García y T. Sierra.

3.5. Equipo de Jaén (línea mixta, didáctica del análisis matemático)

Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos del análisis matemático en manuales y en estudiantes de Bachillerato LOGSE y de primer curso universitario.
Coordinación: A. Contreras; Miembros: C. Sanchez, M. Ortega, L. Luque y L. Ordoñez.

3.6. Equipo de Madrid (línea cognitiva y semiótica)

Determinación de invariantes operatorios relativos al campo conceptual de las magnitudes. Representaciones semióticas asociadas.
Coordinación: C. Chamorro; Miembros: F. Vecino, S. Simarro y J.M. Belmonte.

3.7. Equipo de Murcia (línea mixta)

Matemáticas en la formación del profesorado.
Coordinación: D. Carrillo; Miembro: E. Sánchez.

3.8. Equipo de Pamplona (línea teoría de las situaciones)

Determinación de concepciones y lectura de gráficas cartesianas de funciones.
Coordinación: E. Lacasta; Miembro: J. R. Pascual.

3.9. Equipo de Zaragoza (línea teoría de las situaciones)

E. Cid: Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos.

C. Molina: Diagnóstico de dificultades en matemáticas. Orientación a profesores de alumnos con necesidades educativas especiales (en educación primaria y secundaria).

3.10. Proyecto coordinado (línea metadidáctica)

Integración de enfoques de investigación en didáctica de las matemáticas
Coordinación: J. D. Godino: Miembros: el Grupo DMDC.

El carácter relativamente reciente del área de conocimiento «didáctica de la matemática» es una de las causas de que no exista todavía un paradigma de investigación consolidado. En el trabajo de Sierpinska y Lerman (1996) sobre epistemología de las matemáticas y de la educación matemática, podemos observar la gran diversidad de enfoques teóricos que conviven actualmente. En ciertos momentos esta diversidad puede ser inevitable e, incluso, enriquecedora; pero el progreso de la disciplina y la potenciación de sus aplicaciones prácticas exige aunar esfuerzos para identificar un núcleo firme de conceptos y métodos que, a la larga, deberían cristalizar en un verdadero Programa de Investigación, no necesariamente único. Algunos trabajos recientes sugieren avances en esa dirección (Gascón, 1998 y 1999).

A fin de mostrar la importancia, y hasta la necesidad imperiosa, de que la didáctica de las matemáticas alcance este estadio de desarrollo como paso previo al reconocimiento social y cultural de nuestra disciplina y, lo que es más importante, como paso previo a una verdadera incidencia de la investigación didáctica sobre el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas, basta pensar en el problema del currículo de matemáticas: «¿Qué matemáticas han de formar parte de la enseñanza obligatoria para todos los ciudadanos? ¿Cómo deben reorganizarse para ser enseñadas?» Éste es un problema crucial que no podremos abordar científicamente hasta que no dispongamos de un Programa de Investigación mínimamente consolidado. Entretanto, las opiniones de presuntos «expertos» en la materia dan a entender claramente que el problema puede abordarse desde el simple «sentido común» y la «experiencia docente».

El origen del problema de investigación que abordamos en este proyecto coordinado se sitúa en el ámbito de la epistemología de la didáctica de las matemáticas. Hasta el momento el problema de la articulación de (algunos de) los diferentes enfoques teóricos sólo ha sido abordado de manera parcial y sin especificar un ámbito concreto desde el que realizar dicha integración. Existen, eso sí, numerosas investigaciones que, sin ninguna pretensión de articulación teórica, utilizan de manera ecléctica dos o más de las teorías citadas anteriormente (como, por ejemplo, TSD y TCC; o bien TSD y TAD).

En este proyecto se pretende iniciar el análisis conjunto de los cuatro modelos teóricos mencionados. Se persigue básicamente clarificar los constructos (primitivos y derivados) y los postulados de cada una de las teorías, analizar sus respectivas potencialidades para el análisis didáctico -en las facetas epistémica, cognitiva e instruccional- y discernir la compatibilidad y complementariedad, o por el contrario, la incompatibilidad y redundancia de las mismas. La finalidad última consiste en identificar los elementos básicos, o núcleo firme, de una aproximación integradora que permita formular una agenda de investigación coherente y productiva para la didáctica de las matemáticas y, en particular, que permita abordar el problema del currículo.

Como estrategia metodológica inicial hemos elegido un tema didáctico-matemático sobre el que aplicar las diversas herramientas teóricas. Se trata de la problemática de la medida de magnitudes en la escuela primaria. Hemos seleccionado un artículo (G. y N. Brousseau, 1991) que describe las experiencias, investigaciones y reflexiones sobre el tema de la medida en la escuela elemental.

Dentro de este proyecto se han producido las primeras versiones de cuatro trabajos (elaborados, respectivamente, desde cada una de las cuatro teorías citadas) que se han presentado en las XIV Jornadas SIIDM celebradas en Cangas en abril de 2000 y cuyos textos pueden recuperarse en la página web del grupo.

4. OBSERVACIONES FINALES

El enfoque epistemológico en didáctica de las matemáticas, entendido como hemos descrito en la sección 2 de este trabajo pretende, en primera instancia, poner a punto herramientas conceptuales que ayuden a describir y comprender los problemas relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; por esta razón está llamado a jugar un papel esencial en el desarrollo de la educación matemática. Constatamos, sin embargo, que durante los últimos decenios el enfoque epistemológico ha estado confinado a un ámbito relativamente restringido a nivel internacional, siendo su incidencia en los foros públicos e incluso su influencia en la comunidad científica mucho menor de lo que merecería la calidad y la originalidad de algunos de los trabajos producidos en el marco de dicho enfoque. Creemos, no obstante, que en los últimos años se empiezan a observar síntomas de un acercamiento progresivo entre determinadas teorías surgidas en el marco del enfoque cognitivo y teorías del enfoque epistemológico (Gascón, 1999).

Consideramos que los trabajos del grupo DMDC de la SEIEM pueden contribuir al análisis crítico de las teorías que se están desarrollando dentro del enfoque epistemológico, así como a su confrontación, difusión y apertura. Este trabajo constituye para nosotros una aventura intelectual apasionante, comparable a los esfuerzos de fundamentación de las matemáticas de la segunda mitad del siglo XIX: el nacimiento y consolidación de una nueva disciplina científica.

REFERENCIAS

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999). 'La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique', Recherches en Didactique des Mathematiques, 19(1), 77-124.

Brousseau G. y Brousseau, N. (1991). 'Le poids d'un recipient. Étude des problèmes du mesurage en CM', Gran N, 50, 65-87. [Traducción al español recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/si-idm.htm]

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Eds. and Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, La Pensée Sauvage: Grenoble.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées pau une approche anthropologique, Recherches en Didactique des Mathematiques, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, ICE/Horsori: Barcelona.

Gascón, J. (1998). 'Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica', Recherches en Didactique des Mathematiques, 18(1), 7-34.

Gascón, J. (1999). '«Didactique fondamentale» versus «Advanced Mathematical Thinking»: ¿Dos Programas de Investigación inconmensurables?', Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques, Tome II, Editeur: ARDM, pp. 152-170.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). 'Significado institucional y personal de los objetos matemáticos', Recherches en Didactique des Mathematiques, 14(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (en prensa). 'Semiotic functions in teaching and learning mathematics´, En: M. Anderson, V. Cifarelli, A. Sáenz-Ludlow y A. Vile (Eds.), Semiotics perspectives in Mathematics Education [Versión española recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino]

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). 'Epistemologies of mathematics and mathematics education'. En: A.J.Bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education, Dordrecht, HL: Kluwer, A.P, pp. 827-876.

Vergnaud, G. (1991). 'La théorie des champs conceptuels', Recherches en Didactique des Mathematiques, 10(2-3), 133-169.

MESA REDONDA

INTERNET COMO HERRAMIENTA Y OBJETO PARA LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

COORDINADOR
Dr. Juan Díaz Godino, Universidad de Granada.

PONENCIA1
Comunidad iberoamericana virtual de educación matemática
Dr. Juan D. Godino
Universidad de Granada
Dr. Jesús Enfedaque
Universidad de Barcelona

PONENCIA 2
La educación matemática en el ciberespacio
Perspectivas para un futuro próximo
Dr. Ángel Martínez Recio
Universidad de Córdoba

PONENCIA 3
Internet como herramienta y objeto para la investigación
en didáctica de la matemática
Dr. Francisco Ruiz
Dr. Enrique Castro
Dr. Juan D. Godino
Universidad de Granada

Comunidad iberoamericana virtual de educación matemática

Juan D. Godino
Universidad de Granada
Jesús Enfedaque
Universidad de Barcelona

RESUMEN

Analizamos las posibilidades de Internet para potenciar las relaciones e interacciones en el colectivo de educadores matemáticos en los países iberoamericanos. La existencia de diversas sociedades nacionales de investigadores y profesores de matemáticas, de revistas, jornadas, simposios, así como foros de discusión propios, nos lleva a proponer la creación de una Comunidad Iberoamericana Virtual de Educación Matemática (CIVEM), apoyada en el soporte técnico de RedIris del CSIC. Esta red telemática permitirá potenciar la comunicación entre los diversos colectivos y el desarrollo cooperativo de proyectos de innovación e investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

1. INTRODUCCIÓN

Vamos a centrar nuestra contribución al tema de la mesa redonda sobre «Internet como herramienta y objeto para la investigación en didáctica de la matemática», en el IV Simposio de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), en presentar información sobre los recursos ofrecidos a través de Internet para potenciar las relaciones e interacciones entre las comunidades científicas y profesionales interesadas por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como en el desarrollo del área de conocimiento de didáctica de la matemática.

Vamos también a analizar las acciones necesarias para potenciar el uso de los recursos disponibles y sobre todo la creación de vínculos entre las sociedades y comunidades constituidas cuyo objetivo común es promover la mejora de la educación matemática en el ámbito iberoamericano. En particular analizaremos el funcionamiento de los foros de discusión Indimat y Edumat, las posibilidades de colaboración mutua, la creación de otros grupos de discusión orientados a temas específicos, así como el uso de estos dispositivos para potenciar el logro de los objetivos de la SEIEM y su proyección internacional, en particular en la comunidad iberoamericana. Consideramos que la SEIEM puede desempeñar un papel promotor en la puesta en marcha de una Comunidad Iberoamericana Virtual de Educación Matemática (CIVEM), tratando de superar el relativo aislamiento y descoordinación de las distintas sociedades y recursos disponibles.

2. COMUNIDADES VIRTUALES: POSIBILIDADES Y MEDIOS DISPONIBLES

Una comunidad se define en términos de comunicación; si se comparte información y se intercambia, se puede decir que existe comunidad. Una comunidad virtual aparece cuando una comunidad real usa la telemática para mantener y ampliar la comunicación. El hecho de que la interacción entre las personas se pueda realizar entre personas físicamente distantes pero enlazadas mediante redes telemáticas es lo que lleva a hablar de comunidades virtuales. De un modo más preciso Iparraguirre (1998) define una comunidad virtual como

- un grupo humano que comparte una serie de inquietudes o intereses;
- vía telemática, es decir, salvando los límites espaciales y temporales;
- tienen la posibilidad de interactuar de todos hacia todos.

Los servicios que puede prestar la constitución de una comunidad virtual son:

- Compartir cuestiones, problemas e inquietudes;
- Compartir medios (bibliografía, datos experimentales, etc.)
- Trabajar conjuntamente sobre un tema específico.

En España la RedIris del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) está ofreciendo un soporte técnico para la creación y funcionamiento de comunidades virtuales de usuarios (CVU), también denominadas *redes temáticas* (Sanz de las Heras, 2000). Este servicio define genéricamente una CVU como un colectivo de usuarios de la Red que comparten un mismo perfil académico o científico. Los miembros de una CVU no pertenecen a ninguna organización específica sino que se encuentran dispersos entre muchas de ellas y, por lo tanto, no pueden ser coordinados por los servicios de las respectivas organizaciones, más enfocados a ofrecer apoyo interno. La RedIris ofrece este nuevo servicio aportando un conjunto de herramientas integradas para el trabajo cooperativo en grupos de interés organizados. Se trata de ayudar a la creación y organización de estas CVU, aunque siendo sólo responsable del correcto funcionamiento de la parte técnica de los servicios. Sanz de las Heras (2000) describe los objetivos específicos de las Redes Temáticas (o CVU) del siguiente modo:

1. Concentrar recursos y contenidos (publicaciones, proyectos de investigación, etc.)
2. Crear mecanismos y flujos de cooperación entre los colectivos académico-científicos de ámbito nacional e internacional, con especial hincapié en Iberoamérica y Europa.
3. Fomentar la creación de vínculos con los colectivos no pertenecientes a la Comunidad RedIris (sociedades científicas y/o multidisciplinares, fundaciones, agrupaciones, foros especializados, etc.)
4. Disponer de una plataforma *horizontal* donde pueda encajar cualquier iniciativa relacionada con la temática.

Ejemplo de CVU: Tecnología Educativa

Un ejemplo en pleno desarrollo de CVU, constituida en el seno de la RedIris, es la del área temática de Tecnología Educativa, la cual pretende servir de plataforma para potenciar el conocimiento y el uso de las nuevas tecnologías en el ámbito educativo mediante la distribución de materiales periódicos relacionados con la temática, proporcionar un canal de difusión de actividades, experiencias relacionadas y la puesta a disposición del colectivo de recursos educativos.

Concretamente pretende ser un espacio donde los profesionales de este ámbito compartan, intercambien y promuevan proyectos relacionados con la explotación de las posibilidades educativas de las tecnologías de la comunicación, mediante:

- El debate académico en el ámbito iberoamericano respecto a las tecnologías de la comunicación aplicadas a la educación.
- El intercambio de experiencias referidas al diseño, producción, uso y evaluación de nuevos medios didácticos.
- La organización de debates telemáticos, y otras actividades apoyadas en las posibilidades comunicativas de las redes.
- La experimentación de herramientas de aprendizaje colaborativo.
- Experimentación y evaluación de Web tools, etc.
- Promover proyectos de innovación por parte de grupos de profesores del colectivo, etc.

En los diferentes espacios de la Comunidad Virtual de Tecnología Educativa, encontramos recursos variados: Foros de discusión; páginas webs; revistas electrónicas; documentos; zona de trabajo común; chat; tablón de anuncios.

En la siguiente sección estudiaremos estos recursos, actualmente en funcionamiento, aunque de manera dispersa y descoordinada, en la comunidad de educación matemática iberoamericana. Estudiaremos también las posibilidades y estrategia para la constitución de una CVU o red temática de educación matemática bajo el soporte técnico de la RedIris del CSIC.

3. PROYECTO DE CREACIÓN DE *CIVEM*

La tecnología básica en la que se basan las comunidades virtuales está formada por el correo electrónico y los programas de gestión de listas de distribución, el almacenamiento de información en páginas web, la transferencia de ficheros vía ftp, programas para textoconferencias (chats) y videoconferencias, y programas como BSCW que permiten crear áreas de trabajo común. Estos recursos son ofrecidos y gestionados por la infraestructura de la RedIris.

3.1. Foros de discusión

Los foros de discusión basados en el uso de listas de distribución tienen unas características específicas y diferentes respecto a los foros presenciales que tienen lugar en un recinto y en un lapso de tiempo breve. Aunque el uso más frecuente de los foros consiste en la demanda y el ofrecimiento de informaciones sobre el área de interés común (en nuestro caso la educación matemática) referidas a bibliografía, celebración de congresos, etc., también se pueden plantear temas de discusión apoyados por la lectura de documentos que se ponen a disposición de los miembros del foro. En este caso, las diversas propuestas e intervenciones quedan almacenadas y directamente accesibles a los miembros, por lo que los temas posibles quedan abiertos por un tiempo indefinido. Además no hay una estructura jerárquica en el foro, por lo que las intervenciones se pueden producir entre cada miembro y los restantes en un plano de igualdad.

En la actualidad existen dos foros de discusión sobre educación matemática, bajo el soporte de RedIris, que pueden ser uno de los puntos de partida para la constitución de la Comunidad Iberoamericana Virtual de Educación Matemática (CIVEM). A continuación describimos brevemente los objetivos de dichos foros. En ambos hay que destacar el alto porcentaje de personas suscritas pertenecientes a países americanos.

3.1.1. *EDUMAT*

EDUMAT es una lista de distribución de correo electrónico dirigida a los profesionales de la enseñanza de las matemáticas de todos los niveles educativos (Infantil, Primaria, Secundaria, Universidad...). Surgió a iniciativa personal de uno de los coautores de esta ponencia, en el marco del Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de les Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, el 10 de noviembre de 1998.

Algunos objetivos de EDUMAT en relación con la educación matemática son:

1. Servir de foro de debate y colaboración de los enseñantes de las matemáticas en torno a las ideas y planteamientos sobre la educación matemática.
2. Ser un centro difusor de informaciones de carácter general y específico sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (congresos, conferencias, seminarios, jornadas, publicaciones en papel o electrónicas...).
3. Ser un lugar de discusión sobre trabajos de investigación en didáctica de las matemáticas.

4. Ser un centro de intercambio de experiencias e innovaciones educativas en el campo de las matemáticas, prestando un especial interés a la introducción de la informática e Internet en el aula de matemáticas.
5. Ser, en resumidas cuentas, un espacio abierto de comunicación entre todas las personas interesadas en la continua mejora y progreso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Cualquier tema relacionado con la educación matemática tiene cabida en EDUMAT. La matemática recreativa, la historia de la matemáticas y su uso en la enseñanza, la filosofía de las matemáticas y de la educación matemática, la popularización y divulgación de las matemáticas, la etnomatemática.... tienen también su sitio en EDUMAT.

El ámbito de la lista es internacional y la lengua preferente el castellano y cualquier otro idioma latino (catalán, gallego, portugués, italiano y francés). Se aceptan sin problemas textos escritos en euskera e inglés, siempre que vayan acompañados de su correspondiente traducción. La subscripción a la lista es abierta, no hay ningún cuestionario previo, por lo que no se puede hablar con precisión respecto de los componentes de la lista en cuanto a titulaciones profesionales, ejercicio de la profesión, nivel educativo, experiencia docente, etc.

Para contactar con Edumat puede hacerse a través de dos vías, la de la página web en RedIris: http://www.rediris.es/list/info/edumat.html, y en la propia de Edumat alojada en la Universidad de Barcelona, que sirve como anteproyecto a la futura Comunidad Virtual en Educación Matemática: http://www.ub.es/edumat/

Uno de los activos más importantes de Edumat es el carácter internacional de la lista. El número de subscriptores a la lista el 23 de junio del 2000 es de 387, y la distribución de los suscriptores por países es la siguiente:

Argentina	50	Bolivia	2
Brasil	1	Chile	12
Colombia	3	Cuba	3
España	223	Finlandia	1
Holanda	1	Honduras	1
México	2	Perú	4
Suecia	1	USA	2
Uruguay	3	Venezuela	3
Dominio genérico (com, net, org…)			75

3.1.2. *INDIMAT*

La Junta Directiva de la SEIEM tomó la iniciativa de crear un Foro de Discusión en Internet con el nombre de INDIMAT (Investigación en Didáctica de la Matemática), bajo el soporte técnico de la RedIris del CSIC. Se trata de un foro que complementa al Foro EDUMAT, que viene funcionando desde Noviembre de 1998 en la RedIris, centrándose de manera más específica en los temas de investigación en Didáctica de la Matemática.

El Foro INDIMAT fue puesto en funcionamiento el día 4 de Abril del 2000. Está dirigido de manera abierta a todos los investigadores en Didáctica de las Matemáticas y áreas afines que estén interesados en:

1. Identificar y compartir documentos relevantes sobre los fundamentos teóricos y metodológicos de la Didáctica de la Matemática, teniendo en cuenta las distintas aportaciones de otras disciplinas relacionadas.
2. Conocer y analizar diversos enfoques de investigación en didáctica de las matemáticas, contrastando las diversas nociones teóricas y opciones metodológicas que se proponen, así como sus implicaciones para la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
3. Favorecer activamente la cooperación e intercambio entre investigación y docencia en todos los niveles educativos.
4. Facilitar la discusión y difusión de los trabajos y proyectos que se elaboren por los miembros suscritos al Foro entre la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas.

La suscripción a la lista y el envío de contribuciones se puede iniciar desde la propia página web de la SEIEM: http://www.ugr.es/local/seiem/, y desde la página web de Indimat alojada en RedIris: http://www.rediris.es/list/info/INDIMAT.html

En el caso de la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas agrupada entorno a la SEIEM se ha optado, como uno de los medios de acción más importantes, por la celebración de Simposios anuales. Pero el oficio de científico hace ya tiempo que ha sido modificado por la disponibilidad de las redes telemáticas. Como afirma Echeverría (1999), “los científicos no requieren tanto verse las caras como ver sus respectivos esquemas, fórmulas, simulaciones, datos y borradores» (p. 256). El telediálogo que se puede mantener antes y después de los simposios será más rico y profundo que las intervenciones improvisadas y espontáneas que se producen tras la presentación oral de una ponencia. El foro INDIMAT, apoyado en la lectura compartida de documentos puestos a disposición de los participantes en la red puede hacer posible y estimular la discusión antes, y también después, de la celebración de los seminarios presenciales. Además, la implementación del foro mediante listas de distribución hace posible la participación a escala internacional.

El número de subscriptores a INDIMAT el 5 de Julio del 2000 es de 107, distribuido entre 12 países del siguiente modo:

Argentina	24	Bolivia	2
Brasil	1	Chile	1
Colombia	5	Cuba	1
España	56	Francia	3
México	1	Uruguay	1
USA	1		
Dominio genérico (com, net, org…)			11

3.2. Sociedades y grupos promotores de *CIVEM*

Consideramos que el proyecto de creación de CIVEM debería estar basado en las comunidades reales existentes, procurando que no sea una iniciativa aislada de una o dos personas. En España contamos con la existencia de la SEIEM, cuya Junta Directiva, en su reunión de 9-6-2000, ha mostrado un gran interés en este proyecto estando dispuesta a impulsarlo convocando una reunión con la Junta Directiva de la FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas).

Otras sociedades y comités que pueden ser invitados a participar en la promoción de la red temática son:

- APM (Sociedad Portuguesa de Profesores de Matemáticas), en cuyo seno hay constituido un grupo de investigación en didáctica de las matemáticas.
- CIAEM: Comité Interamericano de Educación Matemática, organización regional latinoamericana afiliada al ICMI, promotor, junto con APM y FESPM, de los CIBEM (Congreso Iberoamericano de Educación Matemática)

Hay que destacar que, además de los congresos, reuniones y simposios promovidos por estas sociedades, se están editando diversas revistas (Suma, Quadrante, Epsilon, Números, Educación y Matemática, etc.).

La CIVEM estaría gestionada por un Comité de Administradores, nombrados por las distintas sociedades promotoras, y contaría con un sitio web alojado en RedIris que podría funcionar como el portal de entrada a los recursos telemáticos disponibles sobre educación matemática en el ámbito iberoamericano.

3.3. Otros recursos ofrecidos por RedIris

Además de espacio para alojar una página web de la comunidad virtual de usuarios, y la gestión de listas de distribución, se tiene la posibilidad de alojar documentos recuperables por las personas suscritas a los foros. También se pueden crear Zonas de Trabajo compartidas basadas en el uso del programa BSCW, celebración de texto, audio o videoconferencias y tablones de anuncios.

El programa BSCW es una aplicación pensada para el desarrollo de documentos de un modo distribuido, basado en el uso del correo electrónico y de un navegador (Castillo, 1999). Proporciona un mecanismo de control de versión de los distintos documentos que permite saber para cada versión quién la ha realizado, cuándo y sobre qué documento. También permite la gestión de convocatorias de reunión presenciales o virtuales.

Una vez constituido una comunidad virtual en RedIris, se tiene acceso al servicio de salas de texto-conferencias. Este servicio pretende cubrir las necesidades de reuniones síncronas en los grupos de la comunidad, usando una aplicación sencilla y de bajos requerimientos de recursos, como es la textoconferencia. Para cada sala se nombra un administrador que será el responsable de la admisión de altas y bajas. Las convocatorias se pueden hacer desde BSCW, lo que comporta varias ventajas. La descripción de este servicio se encuentra en

http://www.rediris.es/cvu/serv/chat

La aplicación del *tablón de anuncios* pretende, con la colaboración de todos los miembros, que las personas de la comunidad estén al día de cualquier tema relativo a los objetivos: anuncios de congresos y demás eventos que se vayan convocando; comentarios, sugerencias de vínculos a otros sitios que se considere de interés, etc.

4. OBSERVACIONES FINALES

La comunidad real de educación matemática (profesores de matemáticas e investigadores en didáctica de la matemática) es en la actualidad una comunidad muy numerosa pero escindida y desconectada. Esta situación puede ser natural en un momento histórico determinado, pero pensamos que es posible y necesario establecer vínculos y programas de actuación conjunta entre los diversos colectivos. La creación de un portal en Internet, bajo la infraestructura de la RedIris del CSIC, en el que se enlacen las diversas webs de sociedades y grupos, se gestionen coordinadamente los foros de discusión EDUMAT e INDIMAT, se cree un espacio de colaboración para la edición de revistas electrónicas y la realización de proyectos de actuación conjunta puede ser un instrumento de extraordinario interés para la mejora de la educación matemática en el ámbito iberoamericano.

El carácter distal y reticular del espacio cibernético, o tercer entorno (Echeverría, 1999), hace posible que un proyecto de investigación o una experiencia de innovación se pueda realizar por personas situadas en distintos países y perteneciendo a distintas organizaciones. La red ofrece medios técnicos para ese tipo de trabajo cooperativo.

Debemos ser conscientes, no obstante, que el uso de estos medios técnicos no es inmediato, esto es, requiere un mínimo de conocimientos y destrezas. Se puede hablar de la necesidad de promover una cierta «alfabetización» por parte de las comunidades reales que pretendan realizar su transformación a una comunidad virtual. ¿Cómo se pueden detectar las necesidades de alfabetización en este campo? ¿Puede haber un fenómeno de retraimiento por parte de aquellas personas que tienen dificultades en la adquisición de las nuevas destrezas requeridas y que no saben, o tienen reparo en pedir ayuda?

REFERENCIAS

Castillo, J.:1999, 'Aplicación de herramientas groupware a través de Internet: BSCW. Su utilidad en las comunidades virtuales de usuarios'. URL, http://www.rediris.es/cvu/publ/bscw99.html

Echeverría, J.: 1999, *Los señores del aire: Telépolis y el tercer entorno*. Barcelona: Destino.

Iparraguirre, J.: 1998, 'El taller de comunidades virtuales a 5/3/1998'. Maig 98. http://www.gpd.org/maig98/es/comvirture.htm

Sanz de las Heras, J. :2000, '¿Qué son redes temáticas? Servicio de RedIris para la construcción de Redes Temáticas'. (Comunicación personal, 14 Abril 2000, versión 1.0; jesus.heras@rediris.es)

La educación matemática en el ciberespacio. Perspectivas para un futuro próximo

Ángel Martínez Recio
Universidad de Córdoba

RESUMEN

Se analiza en este trabajo la incidencia tan notable que Internet está teniendo en educación, en particular en la educación matemática. Se analiza el cambio profundo de coordenadas espaciotemporales que introduce Internet, que dan lugar al aula «virtual», en el «ciberespacio», apareciendo un nuevo campus, electrónico, abierto, global. Se presenta un proyecto de investigación para la utilización de Internet en educación matemática y se señalan algunos de sus principales objetivos, destacando el análisis de los procesos cognitivos emergentes de la nueva tecnología y el estudio semiótico de los sistemas de símbolos empleados.

1. INTRODUCCIÓN

La literatura especializada viene señalando, desde hace varios años, las nuevas dimensiones que la tecnología informática centrada en Internet abre al sistema educativo. Pueden consultarse al respecto los artículos de Martínez (1994), Tiffin y Rajasingham (1997); Gisbert, Adell Rallo, Bellver (1997-98). Barceló, Serra, Sánchez-Monge y Sola, 2000); Rubio, Ocón, Fidalgo y Delgado (2000).

La incidencia de Internet sobre el mundo de la educación no es ya una cuestión teórica. El uso de la red de Internet como herramienta educativa se está incrementando rápidamente, existiendo en la actualidad una oferta educativa cuantitativamente importante a través de la red. Cualquier persona con conexión a Internet puede apuntarse a los muchos y variados cursos, de diferentes contenidos y niveles, que se ofrecen en la red.

También en el terreno de la formación superior se observa un notable incremento de las ofertas y demandas educativas. Una iniciativa importante al respecto, por ejemplo, en nuestro ámbito cultural, es la que están llevando a cabo la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI) y el grupo PRISA para desarrollar programas de formación y reconversión del profesorado en Iberoamérica a través de Internet (URL: http://www.fidoc.com/)

La utilización de Internet con fines educativos es un campo abierto a la reflexión y a la investigación. Aparecen nuevos escenarios, nuevos entornos de aprendizaje, que plantean desafíos técnicos y pedagógicos que los profesores y los investigadores debemos recoger.

Pueden considerarse diferentes líneas de estudio. En primer lugar, se pueden estudiar las posibilidades que ofrece la red de Internet como herramienta educativa, complementaria de otras, más tradicionales; lo que incluye el estudio de sus posibilidades como fuente de información bibliográfica, como instrumento de formación teórica, como banco de recursos didácticos, etc.

Pero también se puede considerar la dimensión educativa de la red de Internet como objeto mismo de investigación, analizando qué nuevos fenómenos, qué nuevas variables aparecen en el fenómeno educativo como consecuencia de la implantación universal de dicha red.

2. INTERNET COMO HERRAMIENTA EDUCATIVA

Internet se puede usar como herramienta educativa en varios planos diferentes: como fuente de información bibliográfica, como fuente de recursos didácticos, etc. A continuación se indican, como mero botón de muestra, algunos ejemplos de direcciones para consulta de recursos didácticos:

· Juegos aplicados a la enseñanza de las matemáticas.
Por ejemplo, en la European Scool Net
(URL: http://www.ca.eun.org/vs/maths/maths.html).

· Juegos sobre el Euro
(URL:http://194.179.42.15/P/TU/iiop WebDispatcher PAGINA=HOM2TWEB&SERVICIO=ENTRADA&ENTRADA=euroviaje).

· Animaciones de ordenador. Por ejemplo,
(URL: http://smard.cqu.edu.au/Database/Teaching/JavaMath.html)

· Actividades con recursos tradicionales, como los bloques multibase
(URL: http://mason.gmu.edu/~mmankus/whole/base10/baseten.htm)

· Calculadoras en línea
(URL: http://www-sci.lib.uci.edu/HSG/RefCalculators.html)

· Resolución de problemas interactivos:
URL: (http://www.accessone.com/inew/)

· Software:
(URL: http://www.xtec.es/recursos/mates/aqui/index.htm)
(URL: http://www.educared.net/aprende/softwareEducativo/index.htm)

· Sitios genéricos. Por ejemplo:

Programa de nuevas tecnologías del MEC
(URL: http://www.pntic.mec.es/)
Math Forum
(URL: http://forum.swarthmore.edu/)
Un sitio excelente es Armilar
(URL: http://www.xtec.es/~qcastell/portada.htm)
Esta es sólo una brevísima muestra de la ingente cantidad de recursos que existen en la red, aplicables a la educación matemática.

3. INTERNET COMO OBJETO DE INVESTIGACIÓN

Los ejemplos anteriores pueden ayudar a entender la importancia del fenómeno Internet en educación, en particular en educación matemática. Pero con ser tantas las aplicaciones que existen en la red, que pueden servir de apoyo a la educación matemática, lo que le confiere su auténtica potencialidad a la red es su capacidad como vehículo de comunicación educativa. Esta capacidad introduce cambios tan notables en el mundo de la educación que plantea la necesidad de estudiar en profundidad el significado de Internet en educación.

El uso de Internet como instrumento de comunicación educativa produce una modificación profunda de las coordenadas espaciotemporales que configuran y determinan muchas de las variables del proceso de enseñanza/aprendizaje. La unidad básica tradicional de espacio educativo (el aula o clase), tiempo educativo (el tiempo de clase) y acción educativa (todos en el mismo lugar, al mismo tiempo, realizando las mismas actividades de aprendizaje), se ve afectada, de acuerdo con Salinas (1997), por el uso de Internet.

El ambiente tradicional de enseñanza comienza a desdibujarse, al propiciar las telecomunicaciones nuevas relaciones entre los actores del proceso de enseñanza/aprendizaje, en diversas circunstancias. La tradicional comunicación "cara a cara" entre profesor y alumnos se ve sustituida por una comunicación mediada por el uso del ordenador. Los procesos de comunicación entre el profesor y los alumnos, y de éstos entre sí, pueden ser asíncronos.

La introducción de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación suponen, en consecuencia, la desaparición del espacio escolar como espacio físico donde se desarrollan las actividades de aprendizaje.

De acuerdo con autores como Martínez (1994), o como Gisbert, Adell, Rallo, Bellver (1997-98), en educación aparecen nuevos conceptos, tales como el aula "virtual", situada dentro del "ciberespacio", que sirven para definir el espacio en que se produce la comunicación, independientemente del lugar físico que ocupa cada uno de los sujetos y medios implicados en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

El centro escolar aparece, en este contexto, como señala Martínez (1994), más como una idea, como un concepto, que como una realidad física. El uso de las redes informáticas abre nuevos escenarios de aprendizaje, atemporales, sin ubicación espacial determinada. Las tradicionales instituciones de enseñanza pasan a constituir simples nodos de un entramado de redes entre las que el alumno-usuario se mueve, en unas coordenadas más flexibles, dentro del ciberespacio.

Se configura un nuevo campus, electrónico, abierto, global, modificándose profundamente el funcionamiento y el sentido de las instituciones u organizaciones que administran la enseñanza, en cuanto que la utilización de las telecomunicaciones implican nuevas estructuras de comunicación del usuario con la organización, nuevos sistemas de diseño de los cursos, de producción y distribución de los recursos y materiales educativos, etc.

El importante cambio de escenario educativo que implica Internet origina, indudablemente, cambios curriculares, que deben ser analizados.

Pues el uso, mediante la comunicación electrónica, de sistemas hipertexto, bases de datos en línea, bibliotecas electrónicas, etc., favorecen el desarrollo de materiales curriculares dinámicos, no sólo ricos en contenidos sino también motivadores y fáciles de usar para los alumnos.

Son nuevas maneras de presentar y acceder al conocimiento que superan en muchos aspectos las formas tradicionales de la explicación oral, la pizarra, los apuntes y el manual. No es necesario explicar las bondades de las simulaciones de procesos, la representación gráfica, la integración de texto, imagen y sonido o de la navegación hipertextual. De acuerdo con Adell (1997), en el futuro, este tipo de soportes serán utilizados de modo creciente en todos los niveles educativos.

Ello supone cambios en los procesos de diseño instruccional. En la enseñanza convencional habitualmente se descuida, en la planificación curricular, la indagación y exploración del alumno. Entre otras razones por cuestión de tiempo. Sin embargo, este nuevo marco para el diseño curricular “obliga” al ‘diálogo’ o ‘conversación’ entre profesores y estudiantes, fomentando los aspectos de interacción y cooperación del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los enfoques conversacionales que induce el uso de las redes informáticas en educación se basan en la suposición de que la comunicación está en el centro del proceso educativo. Hay una conversación constante entre profesores y estudiantes, simulada mediante la interacción de los estudiantes con los cursos preproducidos (delegada por parte del profesor), y real, por medio de la comunicación a través de medios convencionales o de las nuevas tecnologías con los profesores.

Para Salinas (1999a, 1999b), las nuevas tecnologías de la información y la comunicación demandan en educación curricula flexibles y abiertos. Requieren materiales y cursos que, al estar centrados en el alumno, incluyan entre sus cualidades instruccionales la flexibilidad y adaptabilidad a las distintas situaciones de aprendizaje en las que tienen que integrarse. Implican estrategias que proporcionen al usuario control sobre el propio proceso de aprendizaje y la interactividad necesaria para aportar un estilo conversacional o de diálogo al proceso.

Se produce un importante cambio en el papel del profesor. El profesor deja de ser fuentes del conocimiento y pasa a actuar de guía de alumnos para facilitarles el uso de recursos y herramientas que necesitan para acceder a un amplio rango de recursos de aprendizaje.

Un uso abierto y flexible de Internet en educación permite fomentar el aprendizaje colaborativo. El término *aprendizaje colaborativo* refiere a un método de instrucción en el que estudiantes de varios niveles de rendimiento trabajan juntos en pequeños grupos hacia un objetivo común (Gokhale, 1995).

Los modelos de aprendizaje colaborativo están siendo aplicada en situaciones de aprendizaje mediadas por el uso de redes de ordenadores, como un entorno, en el que la interacción entre estudiantes es monitorizada y controlada a través de un sistema informático (Suresh, 1996a, 1996b).

4. UN PROYECTO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, A TRAVÉS INTERNET

En esta línea de pensamiento hemos diseñado un proyecto de investigación, a desarrollar en tres años, cuyo objetivo central es diseñar escenarios educativos sustentados en la red de Internet, aplicados a la educación matemática, analizando los procesos de enseñanza/aprendizaje que tienen lugar en dichos escenarios.

Un antecedente importante en este ámbito son los proyectos desarrollados al respecto por Josep Mª Fortuny, en la Universidad Autónoma de Barcelona (URL: http://blues.uab.es/~ipdm4/Fortuny.html

Como objetivos concretos de nuestro proyecto, nos hemos planteado los siguientes:

· Aplicar las posibilidades que ofrece Internet dentro de la asignatura "Matemática y su Didáctica ", en la Facultad de Ciencias de la Educación de Córdoba, para el tercer curso de la especialidad de Educación Primaria.
· Crear un sistema de información bibliográfica y sobre recursos metodológicos, mediante un espacio web, aplicable a la asignatura considerada, con enlaces con una diversidad de espacios webs existentes en la red, a niveles nacional e internacional, procurando abarcar una amplia variedad de enfoques y contenidos.
· Diseñar un sistema de enseñanza/aprendizaje basado en la formulación de tareas por parte del profesor, que permitan y favorezcan procesos colaborativos entre los estudiantes, compatibles con sus propios procesos personales de construcción del conocimiento.
· Procurar un intercambio progresivo de experiencias con otros centros universitarios, nacionales e internacionales, que desarrollen enseñanzas cercanas en contenido y metodología.
· Organizar un sistema de tutoría compatible con la flexibilidad y riqueza creativa del sistema de enseñanza/aprendizaje indicado.
· Analizar los procesos cognitivos que se producen en dicho sistema de enseñanza/aprendizaje, valorando las estrategias seguidas por los estudiantes para buscar y organizar la información necesaria, para aplicar

dicha información a las tareas propuestas, para comunicar sus resultados a otros agentes intervinientes(otros estudiantes, el profesor, la comunidad educativa, etc).

· Analizar, de modo específico, los sistemas de signos usados en dichos procesos de enseñanza/aprendizaje, considerando los aspectos semióticos de los mismos como un problema de investigación de especial relevancia.

Nuestro sistema de enseñanza se basará en propuestas de trabajo concretas, que los alumnos deberán desarrollar. Por ejemplo, una propuesta será elaborar e introducir en la red un taller sobre el Euro. El taller será de tipo práctico, de manera que servirá para que alumnos de Educación Primaria puedan aprender sobre el mismo conceptos matemáticos que puedan relacionarse con el Euro. Más aún, seleccionaremos a alumnos de diferentes niveles de Educación Primaria para que participen en ese taller y puedan confirmar, de modo empírico, la calidad pedagógica de la propuesta que se les ofrezca.

5. ASPECTOS SEMIÓTICOS DERIVADOS DEL USO EDUCATIVO DE LA RED DE INTERNET

Como hemos indicado, una parte importante de nuestro proyecto será la exploración de los niveles de construcción de conocimientos matemáticos alcanzados por los estudiantes, a través del estudio de los sistemas de signos intervinientes en el proceso.

El ordenador es esencialmente un medio para transmitir señales de emisores humanos a receptores humanos. En el centro de esta relación está el signo, que, según Holmqvist y Jensen (1993), envuelve tres aspectos implicados en la construcción de significados: (1) el signo percibible, físico (representante); (2) la realidad externa que el signo refiere (objeto); y (3) el efecto del signo sobre la mente del usuario (interpretante).

Del estudio de los signos y el modo en que funcionan en la producción de significado se encarga la semiótica. La semiótica está basada en la asumción de que la creación y comunicación de significados está basada en signos y códigos. La tecnología basada en los ordenadores induce un estudio de los procesos que pone en marcha, desde un punto de vista semiótico e, inversamente, convierte a la semiótica en una aproximación científica especialmente privilegiada para el estudio de los ordenadores.

A nosotros nos interesa especialmente analizar los cambios derivados de la introducción de una nueva tecnología de comunicación en los procesos educativos, que da lugar a *diferentes formas de transmitir y recibir la información*, interesándonos, en particular, los *sistemas simbólicos* que se utilizan y el papel que juegan distintos tipos de códigos como soportes del contenido en cada una de esas tecnologías. Es de especial importancia para nosotros la investigación del grado de abstracción del código utilizado, lo que es expresión, de acuerdo con Recio y Godino (1996), del nivel de profundidad conseguido en el desarrollo del pensamiento matemático.

En este apartado, partiremos de otros estudios que hemos realizado anteriormente (Godino y Recio, 1998; Recio, 2000).

REFERENCIAS

Adell, J. (1997). Tendencias en educación en la sociedad de las tecnologías de la información. *Edutec, Revista electrónica de tecnología educativa.* (URL: http://www.uib.es/depart/gte/revelec7.html)

Barceló, I., Serra, B., Sánchez-Monge, M.M. , Sola, A. (2000). Educación y NTIC. Desarrollo de proyectos para la extensión de la actividad docente universitaria basados en Agora. Boletín de RedIRIS nº 50-51. (URL: http://www.rediris.es/rediris/boletin/50-51/ponencia2.html)

Gisbert, M., Adell, J., Rallo, R., Bellver, T. (1997-98). Entornos virtuales de enseñanza y aprendizaje: el proyecto GET. Cuadernos de documentación multimedia. (URL: http://www.ucm.es/info/multidoc/multidoc/revista/cuad6-7/evea.htm)

Godino, J. D. y Recio A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier and K. Newstead (Eds.): *Proceedings of the 22th International Conference of PME* (Vol. 3, pp. 1-8), Stellenbosch, South Africa.

Gokhale, A. (1995). Collaborative Learning Enhances Critical Thinking. *Journal of Technology Education* Vol.7, nº 1.

Holmqvist, B., Jensen, J. (1993). *The Computer as medium*. Cambridge University Press. (URL: http://imv.aau.dk/~pba/CM.html)

Martínez, F. (1994). Investigación y nuevas tecnologías de la comunicación en la enseñanza: el futuro inmediato. *Pixel-Bit, Revista de medios y educación*, 2. (URL: http://www.us.es/pixelbit/articulos/n2/art21.htm)

Recio, A.M. (2000). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Recio, A. M. y Godino, J. D. (1996). Assessment of university students' mathematical generalization and symbolization capacities. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.): *Proceedings of the 20th International Conference of PME* (p. I-231), Valencia.

Rubio, E., Ocón, A.., Fidalgo, A. y Delgado, D. (2000). Formación vía Internet. Interfaz Virtual de Aula. Boletín de RedIRIS nº 50-51. (URL: http://www.rediris.es/rediris/boletin/50-51/ponencia4.html)

Salinas, J. (1997): Nuevos ambientes de aprendizaje para una sociedad de la información. *Revista Pensamiento Educativo* PUC Chile. 20 (URL: http://www.uib.es/depart/gte/ambientes.html)

Salinas, J. (1999a). Uso educativo de las redes informáticas. *Revista Educar*, 25. Univ. Autónoma Barcelona (URL: http://www.uib.es/depart/gte/educar.html)

Salinas, J. (1.999b): Rol del profesorado universitario ante los cambios de la era digital. *Perfeccionamiento Integral del Profesor Universitario, Primer Encuentro Iberoamericano. Universidad Central de Venezuela.* Caracas. (URL: http://www.uib.es/depart/gte/rol.html)

Suresh (1996a). *Theories of Learning and Cognition in Collaboration* (Documento Electrónico)
(URL:http://www.cs.usask.ca/grads/vsk719/academic/890/project2/node7.html#SECTION00031300000000000000)

Suresh (1996b). *Computer-Supported Collaborative Learning: Issues for Research.* (Documento Electrónico)
(URL: http://www.cs.usask.ca/grads/vsk719/academic/890/project2/project2.html)

Tiffin, J. y Rajasingham, Y. (1997). En busca de la clase virtual. La educación en la sociedad de la información. Paidós. Madrid.

Internet como herramienta y objeto para la investigación en didáctica de la matemática

Francisco Ruiz
Enrique Castro
Juan D. Godino
Universidad de Granada

RESUMEN

Presentamos una recopilación de sitios en Internet que proporcionan información de interés para distintas fases del proceso de investigación en didáctica de la matemática (fuentes documentales, difusión de las investigaciones), así como sobre centros, organismos y asociaciones profesionales relacionadas con la educación matemática.

1. INTRODUCCIÓN

La celebración de la mesa redonda sobre el tema «Internet como herramienta y objeto de investigación en Didáctica de la Matemática», dentro del IV Simposio de la SEIEM, nos ha permitido profundizar en nuestro conocimiento de la red al obligarnos a recabar, de manera sistemática, información disponible sobre el tema elegido. Nuestra contribución la hemos centrado en el inventario de los recursos ofrecidos en Internet para facilitar la investigación en nuestra área de conocimiento, inventario que no pretendemos sea exhaustivo dadas las dimensiones y complejidad de la información contenida en la red y la limitación de espacio. Las distintas direcciones web seleccionadas las clasificamos teniendo en cuenta su uso potencial en las principales fases del proceso de investigación; además del correspondiente URL (Uniform Resources Locator) damos una breve descripción del contenido y un comentario sobre su potencial utilidad.

Las fases del proceso de investigación para las cuales podemos encontrar información relevante en Internet son las siguientes:

(1) Antecedentes y estado de la cuestión sobre un tema: bases de datos y publicaciones electrónicas (revistas, tesis doctorales, monografías,etc.)

(2) Difusión de resultados: congresos /conferencias, actas, publicaciones electrónicas.

Además de recursos para facilitar el proceso de investigación encontramos herramientas para la búsqueda de fuentes bibliográficas y medios de difusión de las investigaciones. Encontramos también un número cada vez mayor de recursos cuyo empleo para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas reclama el diseño, desarrollo y evaluación de investigaciones específicas, proporcionando nuevos temas de investigación didáctico-matemática. En este trabajo nos limitamos a mencionar algunos ejemplos de sitios web que nos pueden interesar como investigadores.Incluimos un tercer apartado con el nombre genérico (3) Recursos objeto de investigación didáctico-matemática (software y material didáctico).

Debido a que la actividad de investigación se realiza en el seno de grupos y requiere el apoyo e infraestructura de diversas organizaciones incluimos también un epígrafe sobre:

(4) Centros de investigación (organizaciones, departamentos, grupos)

Dentro de cada apartado listamos las direcciones por orden alfabético, y concluimos con un comentario sobre la relevancia relativa de las mismas.

2. BASES DE DATOS Y PUBLICACIONES ELECTRÓNICAS

2.1. Bases de datos

ERIC: (Educational Resources Information Center)

URL: http://www.ericse.org/mathindex.html

Base de datos de EE.UU. que incluye referencias y resúmenes de publicaciones seleccionadas de revistas especializadas en temas de educación matemática.

Las universidades andaluzas tienen libre acceso y completo a ERIC en la dirección http://bdserver.cica.es/bdatos/

MATHDI:

URL: http://www.emis.de/MATH/DI.html

Versión electrónica del Zentralblat für Didaktik der Mathematik que incluye referencias y resúmenes de publicaciones de didáctica de la matemática desde 1976 extraidas de más de 350 revistas especializadas. Es una base de datos comercial cuya consulta completa requiere darse de alta en el servicio correspondiente. No obstante, indica el numero de referencias existentes para cada término de búsqueda y acceso a 3 de dichas referencias.

TESEO

URL: http://www.mec.es/teseo/

La Base de Datos TESEO, del Consejo de Universidades, recoge y permite recuperar información acerca de las tesis doctorales leídas y consideradas aptas en las Universidades españolas desde 1976. Además de los datos referenciales de la tesis (autor, título, universidad, año) informa del director de la tesis y un resumen de entre 15 y 20 líneas. Es de libre acceso.

UMI ProQuest Digital Dissertations:

URL: http://wwwlib.umi.com/dissertations/

Base de datos de la University Microfilm International. Contiene casi la totalidad de las tesis doctorales realizadas en las universidades de EE.UU y gran cantidad de otros países. El acceso completo a los resúmenes y a las tesis debe hacerse previo pago de su importe. No obstante, sepermite el libre acceso a las tesis publicadas en los dos últimos años.

2.2. Publicaciones electrónicas

Las revistas sobre investigación en educación matemática están presentes en Internetfundamentalmente de dos maneras:

a) Revistas electrónicas: Revistas nuevas que han surgido al calor de las posibilidades de Internet; están publicadas y pueden ser leídas únicamente en Internet. Estas revistas muestran sus artículos completos en la red.
b) Revistas con edición impresa que muestran sólo los títulos y los abstracts. Aunque es necesario inscribirse como suscriptor para leer sus artículos, podemos pedir que nos los envíen vía Internet.

Gran parte de estas revistas ofrecen resúmenes de sus contenidos a través de Internet. Puesto que la lista de revistas es grande, conviene que empecemos con un servidor que nos preste un servicio de búsqueda a través de la red y que esté especializado en revistas. Uno de estos servidores es:

- EBSCO Online: (nombre proveniente del fundador Elton B Stephens CO)

URL: http://www-sp.ebsco.com/online/Reader.asp

Es un servicio de revistas electrónicas a través Internet. Permite a los usuarios acceder y manejar estas revistas y consultar otras de manera restringida. Las revistas y artículosse pueden buscar a través de palabras clave, o ver resúmenes y hojear artículos completos. También se puede acceder a los resúmenes en las revistas de acceso restringido a suscriptores.

2.2.1. *Revistas con edición impresa*

- EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS
  URL: http://www.wkap.nl/journalhome.htm/0013-1954
  Editada por Kluwer.
- JOURNAL OF MATHEMATICS TEACHER EDUCATION
  URL: http://www.wkap.nl/journalhome.htm/1386-4416
  Editada por Kluwer.
- JRME Online. The Journal for Research in Mathematics Education.
  URL: http://www.nctm.org/jrme/ .
  Es una revista oficial del National Council of Teachers of Mathematics.
- MATHEMATICAL THINKING AND LEARNING
  URL: http://www.erlbaum.com/Journals/journals/MTL/mtl.htm •

MATHEMATICAL COGNITION
URL: http://www-sp.ebsco.com/online/direct.asp?JournalID=101906
- IJCAME .The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education
URL: http://www.tech.plym.ac.uk/maths/CTMHOME/ijcame.html
- INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTERS FOR MATHEMATICAL LEARNING
URL: http://www.tufts.edu:80/~uwilensk/IJCML/journal.html
- MATHEMATICAL THOUGHT
URL: http://www.soton.ac.uk/~gary/Math_thought.html
Publicada por el Centre for Research in Mathematics Education at the University of Southampton, UK.
- RECHERCHES EN DIDÁCTICTIQUES DES MATHÉMATIQUES
URL: http://www.labomath.univ-orleans.fr/ARDM/revue.htm
Es la revista científica de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques. Publica tres números por año, desde 1980, en inglés, francés y español.
- REVISTA EMA: INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
URL: http://www.oei.es/n2577.htm
Universidad de los Andes. Colombia
- ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS**:** Revista de investigación y experiencias didácticas. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Barcelona. URL: http://blues.uab.es/rev-ens-ciencias/

2.2.2. *Revistas eléctrónicas*
- BOLETÍN SEIEM
URL: http://www.ugr.es/local/seiem/
Boletín de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Iniciado en 1997 con 3 números al año.
- CHREODS
URL: http://s13a.math.aca.mmu.ac.uk/Chreods/Chreods_Intro.html
- ICMI BULLETIN
http://elib.zib.de/IMU/ICMI/bulletin/index.html
- PHILOSOPHY OF MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL
URL: http://www.ex.ac.uk/~PErnest
- RELIME (no se encuentra esta dirección)
URL: http://www.cinvestav.mx/clame/relime/relime.html
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.
- JOURNAL OF STATISTICAL EDUCATION
URL: http://www.amstat.org/publications/jse/
- SERN (Statistical Education Research Newsletter)
URL: http://www.ugr.es/~batanero/sergroup.htm
Elaborada por C. Batanero en la Universidad de Granada.

3. CONFERENCIAS Y CONGRESOS

CERME: Congreso Europeo de Educación Matemática
URL: http://www.erme.uni-osnabrueck.de/erme98.html
Congreso internacional organizado por la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática, ERME.
ICME (International Congress in Mathematics Education):
URL: http://www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9/
Congreso promovido y organizado por el ICMI cada 4 años. El noveno congreso tendrá lugar en Japón en Julio de 2000.
ICOTS (International Conference on Teaching Statistics):
URL: http://www.swin.edu.au/maths/icots6/
Conferencias internacionales sobre educación estadística promovidas y organizadas por el IASE. La VI Conferencia tendrá lugar en el 2002 en Durban (Sudáfrica).
PME (Psychology of Mathematics Education Conferences):
URL: http://members.tripod.com/~IGPME/welcome.html
Conferencias anuales promovidas y organizadas por el International Commitee of the PME Conferences. En Julio del 2000 se realiza la 24 Reunión en Hiroshima (Japón).
PMENA:North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education
URL (último congreso México 1999):
http://www.cinvestav.mx/mat_edu/PMENAXXII.html
URL (próximo congreso Arizona 2000): http://www.west.asu.edu/cmw/pme/
RELME (Reunión Latinoamerica de Matemática Educativa):
URL: http://www2.cinvestav.mx/clame/relme-14/relme.html
Reunión anual promovida y organizada por el CLAME. En Julio del 2000 realiza su 14ª Reunión en Panamá.
SIMPOSIOS SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática):
URL: http://www.ugr.es/local/seiem/
Reunión anual promovida y organizada por la SEIEM. En Septiembre del 2000 se celebra el IV Simporio en Huelva.

4. RECURSOS OBJETO DE INVESTIGACIÓN POTENCIAL PARA LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

4.1. RECURSOS PARA ÁLGEBRA Y CÁLCULO

AlgebraHelp.com:
URL: http://www.algebrahelp.com/index.htm
Una fuente creciente online de ayudas para el álgebra, que emplea algunas de las últimas tecnologías para ayudar a aprender y comprender álgebra. Esta

página web contiene un conjunto de calculadoras que muestran cómo resolver problemas paso a paso.

Visual Calculus:

URL: http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/

Es una colección de módulos para el estudio o la enseñanza del cálculo. Originalmente, esta colección fue diseñada para dar idea a los enseñantes de cómo utilizar la tecnología y en particular los ordenadores, en la enseñanza del cálculo. La colección se ha expandido e incluye tutoriales, módulos interactivos (MathView, Java, and Javascript) que pueden ser utilizados, bien por los estudiantes o por los profesores. También incluye instrucciones detalladas de las calculadoras gráficasTI-85 y TI-86.

Graphics for the calculus classroom

URL: http://www.math.psu.edu/dna/graphics.html

Contiene una colección de demostraciones gráficas para ser empleadas en un curso de introducción al cálculo.

4.2. Recursos para geometría

The Geometry Center:

URL: http://www.geom.umn.edu/

Contiene dos grandes apartados de geometría interactiva: Gallery of Interactive Geometry y *JAVA* Gallery of Interactive Geometry. Cada uno de estos apartados contiene una colección de pluggins y applets para geometría.

Gallery of Interactive Geometry:

URL: http://www.geom.umn.edu/apps/

Material para: representación de curvas, teselaciones no periódicas, generación de los 17 grupos cristalográficos, visualizar objetos en 3-D.

JAVA Gallery of Interactive Geometry:

URL: http://www.geom.umn.edu/java/

Manipula Math with Java:

URL: http://www.ies.co.jp/math/java/

El material para estudiantes de secundaria, bachillerato, universidad, y para todos aquellos que estén interesados por las matemáticas. Programas interactivos que se pueden manipular y unas animaciones que pueden ayudar a entender el significado de ideas matemáticas.

MathsNet:

URL: http://www.anglia.co.uk/education/mathsnet/intro.html

Brinda la posibilidad de manejar una gran variedad de software interactivo. Podemos ejecutar animaciones y programas interactivos de hojas de cálculo, logo, geometría dinámica, Cinderella, Sketchpad, programas de gráficos, álgebra, puzzles, etc.

4.3. Recursos para estadística

Es recomendable empezar con páginas que incluyen enlaces comentados de otros lugares. IASE, y el Grupo de Estocástica del PME (véase sección de organizaciones y grupos) han organizado listas de recursos clasificados. Otras páginas de interés son:

Statistical Methodology:

URL:http://www.maths.uq.oz.au/~gks/webguide/methods.html

Con vínculos a otras páginas dedicadas a métodos y tópicos estadísticos.

The Globally Accessible Statistical Procedures (GASP):

URL: http://www.stat.sc.edu/rsrch/gasp/

Esta página tiene enlaces a varios Applets en Java que tratan con regresión, intervalos de confianza, el teorema central del límite, y otros. Contiene además la posibilidad de acceder a WebStat, un paquete estadístico para el análisis de datos en la Web.

VassarStats:

URL: http://faculty.vassar.edu/~lowry/VassarStats.html

Dedicada al cálculo estadístico online.

Interactive Stats:

URL: http://members.aol.com/johnp71/javastat.html

Además de constituir en sí misma un potente paquete de software estadístico, podemos encontrar un listado de enlaces online de libros sobre estadísitica, tutoriales, software de libre disposición, y recursos relacionados. Todos los recursos son de libre acceso por Internet.

Rice Virtual Lab in Statistics:

URL: http://www.ruf.rice.edu/~lane/rvls.html

Es un extenso curso de estadística online.

4.4. Materiales diversos

CCP. Connected Curriculum Project

URL: http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/

Materiales de aprendizaje interactivo para las matemáticas y sus aplicaciones.

5. ORGANIZACIONES Y CENTROS DE INVESTIGACIÓN

En este apartado incluimos direcciones de instituciones internacionales o nacionales relacionadas con la educación matemática, asociaciones profesionales, departamentos universitarios con programas de doctorado, proyectos y grupos de investigación en didáctica de la matemática.

5.1. Organizaciones

ARDM (Association pour la Recherche en Didactique des Mathèmatique):

URL: http://www.labomath.univ-orleans.fr/ARDM/

Es la sociedad francesa de investigación en didáctica de la Matemática. Soporta la publicación de la revista *Recherches en Didactique des Mathématiques*, entre otras publicaciones, y organiza las escuelas de verano que se celebran cada dos años, las cuales han logrado un alto reconocimiento internacional.

CLAME: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

URL: http://www.cinvestav.mx/clame/

Organiza las reuniones internacionales conocidas como Relme (la 14ª reunión se celebra en Julio del 2000) y edita la revista electrónica Relime.

CIAEM: Comité Interamericano de Educación Matemática.

URL: http://euclid.barry.edu/~luna/iacme/ciem.html

Organiza las Conferencias Interamericanas de Educación Matemáticas y colabora en la organización de los CIBEM (Congreso Iberoamericano de Educación Matemática). Publica un boletín informativo.

ERME (European Research in Mathematicas Education):

URL: http://www.erme.uni-osnabrueck.de/erme98.html

Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática, constituida en 1998. Ha organizado su primer congreso europeo en Osnabrueck (Alemania) cuyas actas están disponibles en la red.

IASE (International Association for Statistical Eduation):

URL: http://www.cbs.nl/isi/iase.htm

Es una de las sociedades del ISI (International Statistical Institute) encargada de los temas de educación estadística (enseñanza e investigación). Organiza los ICOSTs (International Conference on Teaching Statistics), otros eventos internacionales y diversas publicaciones. Su página web contiene una gran cantidad de enlaces a recursos para la educación estadística.

ICMI (International Commision in Mathematics Instruction):

URL: http://elib.zib.de/IMU/ICMI/

Comisión de la IMU (International Mathematical Union) encargada de los temas de educación matemática desde 1908. Como principales actividades promueve la celebración de los ICME (The International Congress on Mathematical Education) y los ICMI Studies (prestigiosas monografías sobre temas de educación matemática).

PME (Psychology in Mathematics Education):

URL: http://members.tripod.com/~IGPME/

Organización internacional asociada al ICMI que organiza desde 1976 Conferencias internacionales que han logrado un alto reconocimiento entre la comunidad de investigadores en educación matemática por el proceso riguroso de revisión de los informes de investigación incluidos en las Actas.

PME Stochastic Group:

URL: http://www.beeri.org.il/stochastics/

SEIEM: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

URL: http://www.ugr.es/local/seiem/

Edita un Boletín electrónico con informaciones diversas y organiza un Simposio anual (el IV Simposio se celebra en Huelva en Septiembre de 2000).

SUBCOMISIÓN ESPAÑOLA DEL ICMI:

URL: http://www.matesco.unicam.es /icmi.es/

CMESG. Canadian Mathematics Education Study Group

URL: http://plato.acadiau.ca/courses/educ/reid/cmesg/cmesg.html

Edita la revista For the Learning of Mathematics.

5.2. Centros de investigación

CINVESTAV: Centro de Investigación en Matemática Educativa del Instituto Politécnico Nacional de México.

URL: http://www.cinvestav.mx/matedu/

CIRDIS, Centro Interuniversitario di Ricerca per la Didattica delle Discipline Statistiche:

URL: http//www.stat.unipg.it/CIRDIS

CSME (Center for the Study of Mathematics Education, University of Nottingham, U.K.)

URL: http://www.nottingham.ac.uk/csme/csmemenu.html

FREUDENTHAL INSTITUTE:

URL: http://www.fi.ruu.nl/en/algemeen.html

Es el Centro Nacional Experto para la Educación Matemática en los niveles de primaria y secundaria de Holanda. Está integrado en la Universidad de Utrecht.

ROYAL STATISTICAL SOCIETY. CENTER FOR STATISTICAL EDUCATION:

URL: http://science.ntu.ac.uk/rsscse

SERVIDOR WWW EDUCACIÓN MATEMÁTICA:

URL: http://ued.uniandes.edu.co/

Es un servicio de “una empresa docente”, centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes (Colombia). Da acceso a los siguientes servicios: Recursos de Información, Comunidad, Líneas de Investigación, Proyectos, Eventos y cursos, Premios, Otros sitios en la red relacionados, Listas de distribución.

5.3. Departamentos españoles con programas de doctorado en didáctica de la matemática

Departamento de Didáctica Matemátiques i de les Ciéncies Experimentals (Universitat Autónoma de Barcelona):

URL: http://blues.uab.es/~ipdm4/PrgDcot/doctorat.html

Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada:

URL: http://www.ugr.es/local/dpto-did/

Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia:

URL: http://www.uv.es/~didmat/doctorado/index.htm

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de la Universidad de Huelva

URL: http://www2.uhu.es/3erciclo/Default.htm

5.4. Grupos y proyectos

Incluimos en este apartado las direcciones web de los Grupos de Trabajo de la SEIEM, y otros grupos que desarrollan proyectos de investigación, los cuales incluyen enlaces a otros servidores relacionados con temas de investigación específicos:

DMDC (Grupo de Investigación de la SEIEM, "Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica") (continuación del SIIDM):

URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/si-idm.htm

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: PENSAMIENTO NUMÉRICO (Universidad de Granada)

URL: http://www.ugr.es/local/dpto_did/gpnumerico/gpnumerico.html

CDPP (Grupo de Investigación de la SEIEM, "Conocimiento y desarrollo profesional del profesor"):

URL: http://www2.uhu.es/luis.contreras/

EDUCACIÓN ESTADÍSTICA (Universidad de Granada)

URL: http://www.ugr.es/local/batanero/

GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA (Universidad de Sevilla)

URL: http://www.cica.es/~ddmus/giem.htm

GRUPO DE TRABAJO "APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA" de la SEIEM:

URL:http://www.uv.es/~didmat/angel/Pg33AG.html

TEORÍA Y METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA (Universidad de Granada)

URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/

INTERACCIONES TELETUTORIALES SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

URL: http://blues.uab.es/~ipdm4/profesDep/Fortuny.html

GRUPO DE LA"UNIVERSITAT AUTONOMA DE BARCELONA": Procesos del Pensamiento Matemático Avanzado

URL: http://blues.uab.es/~ipdm4/recerca/GrupPMA.html

GRUPO DE INVESTIGAÇAO "DIDÁCTICA E FORMAÇAO" (Facultad de Ciencias de la Universidad de Lisboa)

URL: http://educ.fc.ul.pt/investiga/

6. OTRAS DIRECCIONES DE INTERÉS PARA LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

6.1. Sociedades de profesores de matemáticas

APM (Associasao de Professores de Matemática):

URL: http://www.apm.pt/home.htm

Organiza encuentros nacionales de profesores de matemáticas y de investigadores en didáctica de la matemática y publica las revistas "Educaçao e Matemática" y "Quadrante" (Revista teórica y de investigación).

FESPM: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas:

URL: http://www.smpm.es/fespm/fespm.html

Organismo coordinador de 12 Asociaciones de Profesores de Matemáticas de distintas comunidades del Estado Español. Organiza las JAEM (Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas) y publica la revista SUMA..

MAA Online (The Mathematical Association of America, Teaching and Learning)

URL: http://www.maa.org/t_and_l/index.html

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics)

URL: http://www.nctm.org/

Sin duda la más poderosa asociación de profesores de matemáticas. Organiza en USA congresos nacionales, publica materiales y recursos para la educación matemática, así como las revistas *Journal for Research in Mathematics Education* (la única revista incluida en los índices de impacto del JSCI), *Mathematics Teacher* y *Arithmetics Teacher*.

THALES (Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas):

URL: http://thales.cica.es/

TIMSS (Third Internacional Mathematics and Science Study):

URL: http://forum.swarthmore.edu/social/timss/

6.2. Miscelánea

Otras direcciones web que contienen información complementaria a la que presentamos en este trabajo son las siguientes:

Math Forum - Math Education Research:

URL: http://forum.swarthmore.edu/mathed/mathed.research.html

Math WWW VL: Software

URL: http://euclid.math.fsu.edu/Science/Software.html

7. OBSERVACIONES FINALES

Esta recopilación de sitios en Internet sobre recursos para la investigación en Didáctica de la Matemática, a pesar de que no puede ser exhaustiva, permite, no obstante, apreciar el fuerte impacto de la red en el desarrollo de nuestra área de conocimiento. El trabajo del investigador sobre los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en la fase de búsqueda de fuentes documentales para el planteamiento de los problemas de investigación y la elaboración del estado de la cuestión, queda completamente afectado por la red dado el acceso cada vez más fácil y exhaustivo a las bases de datos "on.line". También se abren grandes perspectivas para la difusión de los resultados de las investigaciones por medio de las publicaciones electrónicas, y sobre todo mediante la creación de páginas webs tanto personales como de los grupos de investigación en las cuales se pueden publicar y recuperar cualquier resultado de las investigaciones. El problema de difusión de la "literatura gris" (memorias, informes) que con frecuencia no pueden ver la luz en las revistas por su gran tamaño, pueden ser incorporadas en las páginas personales, las cuales son fácilmente indexadas por los potentes buscadores de la red.

Queda, no obstante, abierto un problema grave por la superabundancia de información. ¿Cómo seleccionar los trabajos relevantes para nuestro problema de investigación? ¿Cómo identificar los trabajos que cumplen unos estándares de calidad aceptables? ¿Está próxima la fecha en que todas las publicaciones científicas serán electrónicas, editadas con fondos públicos y libremente accesibles?

La información que hemos recopilado puede ser un primer paso para la elaboración de un portal sobre educación matemática que comprenda sitios orientados tanto a la investigación como a la docencia, cuya construcción y actualización podría ser asumida por la SEIEM y puesta al servicio de la Comunidad Iberoamericana de Educación Matemática.

Programa

Martes 12

18,00-20,00	Entrega de documentación.

Miércoles 13

09,00-11,30	Seminario de Investigación I: Representación y comprensión. Coordinadora: Dra. C. Azcárate. Ponentes: Dr. L. Rico (Coordinador), Dra. M. Bosch, Dra, I. Romero, Dra. V. Sánchez.
11,30-12,00	Descanso.
12,00-13,30	Debate del Seminario de Investigación I.
13,30-15,30	Comida (Comedor Universitario).
15,45-17,30	Proyecto I. Coordinador Dr. S. Llinares. Proyecto: Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y estudiantes de Bachillerato LOGSE y primer curso universitario. Investigador principal: Dr. A. Contreras (CIDE, convocatoria 1997). Proyecto II. Coordinador Dr. S. Llinares. Proyecto: Desarrollo de técnicas interactivas de tutorización y formación. Aplicación a situaciones especiales de educación Matemática. Investigador principal: Dr. J.Mª. Fortuny (DGES, convocatoria 1996). Ponente: Dr. P. Cobo. Redactora de los Proyectos I y II: Dra. L. Serrazina.
17,45	Visita turística a los lugares colombinos y cena en la Hostería de la Rábida (Inauguración Oficial).
23,30	Regreso a Huelva.

Jueves 14

09,00-11,30	Seminario de Investigación II: Pensamiento numérico y algebraico. Coordinador: Dr. M. Socas. Ponentes: Dr. J. A. García Cruz (Coordinador), Dra. A. Bruno, Dr. J. L. González y Dr. A. Ortíz.
11,30-12,00	Descanso.
12,00-14,00	Paneles. Coordinador Dr. J. D. Godino. Panel 1. Grupo de Trabajo: Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Ponente: Dra. M. J. Cañizares. Panel 2. Grupo de Trabajo: Didáctica de la Matemática como disciplina científica. Ponentes: Dra. P. Orús y Dra. L. Ruíz.
14,00-16,00	Comida (Comedor Universitario).
16,00-18,00	Grupos de Trabajo.
18,15-19,15	Asamblea de la Sociedad.
19,30	Salida para Punta Umbría (paseo en canoa y cena).
24,00	Regreso a Huelva.

VIERNES 15

09,00-11,00	Mesa Redonda: Internet como herramienta y objeto para la investigación en Didáctica de la Matemática. Coordinador: Dr. J. D. Godino. Ponentes: Dr. J. D. Godino, Dr. A. M. Recio, Dr. F. Ruíz.
11,00-11,30	Descanso.
11-30-13,30	Grupos de Trabajo.
14,00	Almuerzo de Clausura.

Nombre y Apellidos	*Universidad*	*E-mail*
Concepción F. Abraira Fernández	León	demcaf@isidoro.unileon.es
Celia Anglada Pozo	Málaga	ce_anglada@mixmail.com
Mario Arrieche Alvarado	Granada	arrieche@platon.ugr.es
Carmen Azcárate Giménez	A. Barcelona	carmen.azcarate@uab.es
Pilar Azcárate Goded	Cádiz	pilar.azcarate@uca.es
Edelmira Badillo	A. Barcelona	2083062@ticeu.uab.es
Ricardo Barroso Campos	Sevilla	rbarroso@cica.es
Carmen Batanero Bernabeu	Granada	batanero@ugr.es
Evelio Bedoya Moreno	Granada	ebedoya@ugr.es
Sonsoles Blázquez Martín	Valladolid	sonsoles.blazquez@wanadoo.es
Pilar Bolea Catalán	Zaragoza	pbolea@posta.unizar.es
Marianna Bosch Casabó	Ramón Llull	
Alicia Bruno Castañeda	La Laguna	abruno@ull.es
Mª Humildad Camacho Sánchez	Córdoba	ma1casam@uco.es
Mª Jesús Cañizares Castellanos	Granada	canizare@platon.ugr.es
Daniel Carballo Ruiz	Málaga	danielcr@uma.es
José Carrillo Yáñez	Huelva	carrillo@uhu.es
Encarnación Castro Martínez	Granada	encastro@platon.ugr.es
José Mª Chamoso Sánchez	Salamanca	jchamoso@gugu.usual.es
Nuria Climent Rodríguez	Huelva	climent@uhu.es
Pedro Cobo Lozano		pcobo@pie.xtec.es
Miryam Codes Valcarce	P. Salamanca	mcodes@upsa.es
Antonio Codina Sánchez	Granada	acodisan@yahoo.es
Ángel Contreras De la Fuente	Jaén	afuente@ujaen.es
Luis Carlos Contreras González	Huelva	lcarlos@uhu.es
Teresa Corcobado Cartes	Extremadura	corcobad@unex.es
Moisés Coriat Benarroch	Granada	mcoriat@ugr.es
Antonio Manuel Da Conceiçao Guerreiro	Algarve	aguerrei@ualg.pt
Carlos De Castro		c.castro@eulasalle.com
Enrique De la Torre Fernández	Coruña	torref@udc.es
Miguel Delgado Pineda	UNED	miguel@mat.uned.es
Juan Diaz Godino	Granada	jgodino@ugr.es
Mª Teresa Escudero Martín	Comp. Madrid	vero@cenoclap.es
Isabel Mª Escudero Pérez	Sevilla	imaria@cica.es
Celi Aparecida Espasadin Lopes	Estad. UNICAMP	celilopes@uol.com.br
Mª Candelaria Espinel Febles	La Laguna	mespinel@ull.es
Antonio Estepa Castro	Jaén	aestepa@ujaen.es
Asunción Estrada Roca	Lleida	aestrada@matematica.udl.es
Teresa Fernández Blanco	Santiago	teresa@zmat.usc.es
Mª Lluisa Fiol Mora	A. Barcelona	marialluisa.fiol@uab.es
Pablo Flores Martínez	Granada	pflores@ugr.es
Cecilio Fonseca		cfonseca@uvigo.es
Sabrina Garbin	A. Barcelona	sabrina.garbin@campus.uab.es
Mª Mercedes García Blanco	Sevilla	mgblanco@cica.es
JA García Cruz		
Sandra García Rivas	Málaga	sandra_gr@yahoo.com
Josep Gascón Pérez	A. Barcelona	gascon@mat.uab.es
José Mª Gavilán Izquierdo	Sevilla	gavilan@cica.es
Francisco Gil Cuadra	Almería	fgil@ualm.es
Melchor Gómez García	Comp. Madrid	melchor@eucmos.sim.ucm.es
Pedro Gómez Guzmán	Granada	pgomez@uniandes.edu.co
Mª Teresa González Astudillo	Salamanca	maite@gugu.usual.es
Mª José González López	Cantabria	glopez@matesco.unican.es
José Luis González Mari	Málaga	gmari@uma.es

Guadalupe Gutiérrez Pereda	Pais Vasco	tepgupeg@lg.ehu.es
Mª Carmen Hermida Ferrer	Comp. Madrid	cpuebla@worldonline.es
Mª José Hidalgo Carranza	Badajoz	
Marcelino Ibañes Jalón	Valladolid	
Salvador Llinares Ciscar	Sevilla	llinares@cica.es
Mª Carmen López Esteban	Salamanca	lopezc@gugu.usual.es
José Luis Lupiáñez Gómez	Granada	jllupianez@yahoo.com
Blanca Maeso González	Málaga	blancamg@olemail.com
Mª Elena Martín García	Huelva	
Rocio Martínez González		
Ángel Martínez Recio	Córdoba	ma1marea@uco.es
Joao Filipe Matos	Lisboa	
José Luis Menezes Correia		l.menezes@mail.telepac.pt
Ana Belén Morales Rivero	Málaga	a_morales@mixmail.com
Oliverio Morcote Herrera	Granada	omorcote@platon.ugr.es
Mª Cinta Muñoz Catalán	Huelva	
Susana Muñoz García	Huelva	
Stella Nora Gatica	Nac. San Luis (Arg)	nimberti@fices.unsl.edu.ar
Tomás Ortega Del Rincón	Valladolid	ortega@amuva.es
José Ortiz Buitrago	Granada	ortizb@ugr.es
Alfonso Ortiz Comas	Málaga	comas@uma.es
Juan Jesús Ortiz De Haro	Granada	jortiz@goliat.ugr.es
María Ortiz Vallejo	Valladolid	mortiz@am.uva.es
Pilar Orús Báguena	Jaume I (Castellón)	orus@mat.uji.es
Mª Carmen Penalva Martínez	Alicante	carmina.penalva@ua.es
Pilar Rocío Peral Guinea	Huelva	
Antonio Pérez España	Huelva	peribane@teleline.es
Mª Angustias Piedras Martos	Comp. Madrid	mgupdras@eucmos.sin.ucm.es
Luis Rico Romero	Granada	lrico@goliat.ugr.es
Rafael Roa Guzmán	Granada	rroa@ugr.es
Mercedes Rodríguez Sánchez	Salamanca	meros@gugu.usual.es
Isabel Romero Albaladejo	Almería	imromero@ualm.es
Luisa Ruiz Higueras	Jaén	lruiz@ujaen.es
Francisco Ruiz López	Granada	fcoruiz@ugr.es
Alicia Ruiz Olarría	Autón. Madrid	alicia.ruiz@uam.es
Julio Ruiz Palmero	Málaga	julior948@teleline.es
César Sáenz Castro	Autón. Madrid	cesar.saenz@uam.es
Mª Jesús Salinas Portugal	Santiago	mxsalva@usc.es
Mª Victoria Sánchez García	Sevilla	mvsanche@cica.es
Gloria Sánchez-Matamoros García		
Sara Scaglia Peirone	Granada	scaglia@ugr.es
Luis Serrano Romero	Granada	lserrano@goliat.ugr.es
Lourdes Serrazina	Lisboa	lurdesserrazina@mail.telepac.pt
Jordi Servat Susagne	Barcelona	jservat@d5.ub.es
Tomás Ángel Sierra Delgado	Comp. Madrid	tomass@eucmos.sim.ucm.es
Modesto Sierra Vázquez	Salamanca	mosiva@gugu.usual.es
Mª Sagrario Simarro Fernández	Comp. Madrid	ssimarro@eucmos.sim.ucm.es
Martín Socas Robayna	La Laguna	msocal@ull.es
José Mª Sordo Juanena		jmsordo@eucmos.sim.ucm.es
María Sotos Serrano	Castilla-Mancha	msotos@mag_ab.uclm.es
Pedro Tejada Chaves	Huelva	tejada@uhu.es
Manuel Torralbo Rodríguez	Córdoba	ma1torom@uco.es
Germán Torregrosa Gironés	Alicante	german.torregrosa@ua.es
Pilar Turégano Moratalla	Castilla-Mancha	pturegano@mag_ab.uclm.es
Teresa Ulecia García	UNED	tulecia@mat.uned.es
Susana Villar Sanjurjo	Comp. Madrid	svillars@olemail.com

La presente edición del libro “Cuarto simposio de la sociedad española
de investigación en educación matemática”, se acabó de imprimir
el día 21 de Junio de 2001, siendo la festividad
de San Luis Gonzaga. Al cuidado de la edición
estuvo el Servicio de Publicaciones de
nuestra Universidad.

IV Simposio de la SEIEM. Huelva - 2000
Seminario: Representación y Comprensión Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática

Luis Rico
Universidad de Granada

CUESTIONES GENERALES

Centrar el debate y servir como referencia en el Seminario Representación y Comprensión del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) es objetivo general de este estudio. Con anterioridad a la celebración del Simposio, y a petición de su Comité Científico, se ha redactado este documento, que ha sido conocido por las autoras de las tres ponencias que estructuran el Seminario y, a partir de él, han elaborado su trabajo. Entre los miembros de la SEIEM también tuvo difusión con anterioridad al Simposio.

El documento se propone abordar las siguientes cuestiones generales:

a) Qué se entiende por representación y comprensión; análisis conceptual, delimitación de significados y conexiones.
b) Analizar la complejidad de la noción de representación: funciones epistémicas, objetividad, diversidad, paradojas.
c) Reflexionar en torno al interés general que tienen estas nociones para la investigación en educación matemática.

De este modo, y mediante una serie de interrogantes, se abre y centra el debate sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en didáctica de la matemática.

Conocimiento y representación

Entender el conocimiento humano es un problema central en la reflexión filósofica: ¿cómo es que el hombre puede tener presentes los objetos del mundo externo? ¿dónde y cómo se ubican los conocimientos?

Conocer consiste en «tener la idea o noción de alguna cosa; llegar a saber por el ejercicio de las facultades intelectuales la naturaleza, cualidades y relaciones de las cosas»; «tener en la mente la representación de alguien o algo»; «percibir el objeto como distinto de todo lo que no es él; distinguir a alguien o algo entre otros semejantes» (Cuervo, 1998; Seco, Andrés y Ramos, 1999).

En este mismo orden de reflexión, comprender significa «percibir mentalmente algo», «captar el significado de algo», «entender con claridad lo que quiere decir alguien», «conocer en un objeto todo lo que en él es conocible», «llegar a conocer la naturaleza o modo de ser de una cosa» (Cuervo, 1998; Seco, Andrés y Ramos, 1999). La comprensión resulta así un modo destacado de conocimiento.

Conocer es una actividad intencional, dirigida a un estado de cosas que debe aprehenderse, que tiene como resultado lo que llamamos saber disponible intersubjetivo, organizado y estructurado mediante representaciones (Krings y cols., 1978). El conocimiento humano es central en los procesos de enseñanza y aprendizaje, procesos que tienen como objetivo final el incremento de la comprensión sobre un campo concreto. De ahí el interés que para la didáctica de la matemática tienen las nociones de representación y comprensión.

La epistemología ha encontrado en la noción de representación y nociones conexas, claves para entender e interpretar el modo en que los seres humanos conocen y comprenden; mediante estos y otros conceptos se aborda el estudio del conocimiento humano. La tradición racionalista ha postulado una entidad intermedia entre el sujeto y el objeto, a la que llama ***representación***, ya sea intelectual o imaginativa. La noción de representación es un concepto clave en la filosofía del conocimiento, que se ha manejado y sometido a crítica de manera sistemática. Todas las disciplinas cuyo objeto es el estudio del conocimiento humano manejan las nociones de representación y comprensión. De ahí el interés por clarificar estas nociones.

La tradición filosófica.

Platón, en el mito de la caverna, postuló que nuestro conocimiento es representación de un mundo de ideas, a las cuales tenemos acceso indirectamente.

Descartes, cuando enuncia los principios que deben guiar su entendimiento, propone admitir exclusivamente «aquello que se presentara tan clara y distintamente a mi espíritu que no tuviera motivo alguno para ponerlo en duda» (Discurso del método).

Kant sitúa en la base de su epistemología la noción de representación:

«¿Cómo podría ser despertada a actuar la facultad de conocer sino mediante objetos que afectan a nuestros sentidos y que ora producen por sí mismos representaciones, ora ponen en movimiento la capacidad del entendimiento para comparar esas representaciones, para enlazarlas o separarlas y para elaborar de ese modo la materia bruta de las impresiones sensibles con vistas a un conocimiento de los objetos denominado experiencia?» (Crítica de la razón pura, B 1).

«Los sentidos representan los objetos tal como se manifiestan, mientras que el entendimiento los representa tal y como son. (...) El entendimiento y la sensibilidad que nosotros poseemos sólo pueden determinar objetos si actúan conjuntamente. Si los separamos tendremos intuiciones sin conceptos o conceptos sin intuiciones.» (Crítica de la razón pura, B 314)

Para Kant no hay otro sujeto más que el que piensa y no hay otro objeto conoscible que el que obedece a las exigencias de la representación.

Muchos otros filósofos también se han ocupado de profundizar en la noción de representación, tratando de entender algunos de sus enigmas; entre ellos han destacado Husserl, Heidegger y Wittgenstein (Llano,1999). No es objetivo de este seminario hacer un estudio filosófico sobre la noción de representación, sólo indicar su importancia en la historia de la filosofía, señalar algunas de sus dificultades y poner de manifiesto su complejidad. La historia de la filosofía y de la ciencia muestran la riqueza de sentidos e interpretaciones que tiene este concepto (Ferrater, 1981; Real Academia de Ciencias, 1990).

REPRESENTACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En la década de los 80 se detecta un empleo sistemático de la noción de representación en educación matemáticas. En estos trabajos, el concepto de representación se toma como equivalente a señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los sujetos piensan las matemáticas e, incluso, como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas. Entre varias alternativas conceptuales similares pero no equivalentes: *símbolos* (Skemp, 1980), *sistema matemático de signos* (Kieran y Filloy, 1989), *sistemas de notación* (Kaput, 1992), *sistema de registros semióticos* (Duval, 1993), la comunidad se decantó por dar prioridad al término *representaciones*. Las representaciones matemáticas se han entendido desde entonces, en sentido amplio, como todas aquellas herramientas -signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas; de ahí su interés didáctico (Radford, 1998).

Desde entonces las representaciones se han considerado parte esencial del aparato conceptual necesario para analizar los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas. Pero esta elección no ha estado exenta de dificultades ya que el término elegido es complejo y encierra múltiples significados. A la productividad del concepto ha habido que acompañar intentos de clarificación y precisión sistemáticos, debido a las confusiones e imprecisiones que se han derivado de su uso. La continuación de este esfuerzo es aún necesaria.

El objetivo principal de este seminario lo constituye la aproximación crítica al concepto de representación, relevante para la investigación que en Didáctica de la Matemática se viene realizando en España, ya que se puede presentar e interpretar desde distintas perspectivas. Esta crítica permitirá generar un debate sustentado en experiencias y reflexiones propias de nuestra comunidad.

ANTECEDENTES

Goldin (1993) puso de manifiesto el interés que tiene la noción de representación en las líneas recientes de investigación en educación matemática.

Los estudios de Janvier, que culminan en su tesis en 1978, están entre los trabajos pioneros más conocidos que utilizaron la noción de representación y procedían de los trabajos previos de Bell y otros (Janvier, 1987). Janvier realiza un detallado y conocido estudio de algunas dificultades sobre la comprensión del concepto de función basado en las representaciones gráficas. Los materiales elaborados posteriormente en el *Shell Centre* de la Universidad de Nottigham (1986), que abordaron una enseñanza por diagnóstico sobre este campo conceptual, contribuyeron a difundir la noción de representación y otras asociadas.

Con el concepto de número racional también se ha trabajado sobre la base de considerar y analizar diferentes sistemas de representación. Los trabajos de Behr, Lesh, Post y Silver (1983) se encuentran entre los pioneros en el estudio de los sistemas de representación para ese conjunto numérico, campo que ha continuado ofreciendo resultados productivos (Carpenter, Fennema y Romberg,1993).

En 1984 se celebró un simposio en la Universidad de Québec en Montreal, organizado por el CIRADE, para presentar y discutir las últimas etapas de un proyecto de investigación sobre representación. Resultado de este simposio es el documento «*Problems of Representation in the Teaching and Learnig of Mathematics*» (Janvier, 1987), en el que se plantea el estado de la cuestión y la potencialidad para la investigación en educación matemática del concepto en estudio.

El interés del tópico se puso especialmente de manifiesto por la existencia del *Working Group on Representations*, en el seno del *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, desde 1990 hasta 1995.

Desde una aproximación semiótica, el profesor Duval de la Universidad de Estrasburgo, ha venido trabajando sobre la noción de representación y la comprensión de los *objetos* matemáticos desde comienzos de la década de los 80; sus trabajos *Semiosis y Noesis* (1993) y *Semiosis y Pensamiento Humano* (1999), son aportaciones valiosas en este campo. La Revista *Les sciences de l'education*, editada por el C.E.R.S.E. de la Universidad de Caen, editó el monográfico *Les Représentations Graphiques dans l'Enseignement et la Formation* (Baillé et Maury, 1993), que incluye una serie de contribuciones notables sobre las representaciones gráficas.

Sierpinska (1994), Von Glasersfeld (1995) y muchos otros autores, han reflexionado también sobre estas nociones. En la obra colectiva *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (Biehler y cols., 1994), el concepto de representación se trabaja y emplea extensamente: «*La representación de hechos y relaciones es un aspecto muy importante del aprendizaje y el pensamiento matemático, por ello los educadores matemáticos han estado fuertemente interesados en la investigación psicológica que contribuye a la comprensión de las representaciones*».

Sin ánimo de ser exhaustivos, encontramos explícitamente entre nosotros la noción de sistema de representación en las tesis de Encarnación Castro (1994), José L. González (1995), Isabel Romero (1995), Eduardo Lacasta (1995), Francisco Fernández (1997), José M. Gairín (1998)y Francisco Ruiz, (2000); también en Coriat y Scaglia (2000) hay un uso extenso de estas nociones. Castro y Castro (1997) hacen un análisis conceptual detallado de esta noción, que se se ha utilizado en muchos otros trabajos e investigaciones.

COMPLEJIDAD DE LA NOCIÓN DE REPRESENTACIÓN

La noción general de representación es compleja y se ha utilizado en la investigación en Didáctica de la Matemática de manera productiva.

Sin embargo, resulta un concepto conflictivo.

Consideremos algunos de los significados asociados con el concepto de representación, analicemos su complejidad y explicitemos las dificultades que plantea para la investigación en educación matemática.

En este documento centraremos nuestra consideración en *la representación de conceptos matemáticos* y en su función durante los procesos de enseñanza y aprendizaje. No pretendemos extender estas reflexiones a otras cuestiones de interés para la Didáctica de la Matemática, como pueden ser las diversas representaciones que hace el profesor sobre esos mismos procesos o sobre otras componentes del sistema educativo. Nuestro ámbito de reflexión se centra en el conocimiento matemático (Rico y Sierra, 2000).

OBJETIVIDAD Y REPRESENTACIÓN

Representar es sustituir, dar presencia a un ausente y, por tanto, confirmar su ausencia. La representación supone en este caso una dualidad representante-representado. Se representa para hacer presente algo, pero ese algo es distinto y existente a lo cual la representación sustituye. En la noción de representación subyace el supuesto de un algo objetual que se representa.

De este supuesto surge el esfuerzo por ir a la cosa misma, sin intermediarios de palabras o imágenes. Toda crítica a la representación se esfuerza por alcanzar un conocimiento no mediado. Sin embargo, el acceso principal al modelo sigue siendo la copia; un peligro es que la representación pretenda pasar por la presencia, el signo por la cosa misma.

Símbolo y concepto asociado son dos cosas diferentes (Skemp, 1980). Kaput (1987) señala esta dualidad y muestra las dificultades que de ella se derivan para las matemáticas: «*El concepto de representación da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas. Uno de estos entes se denomina el objeto representante (símbolo o representación), el otro es el objeto representado (concepto), también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados.*»

De esta manera, «*cualquier especificación particular de la noción de representación debiera describir, al menos, cinco entidades:*

1º los objetos representados,
2º los objetos representantes,
3º qué aspectos del mundo representado se representan,
4º qué aspectos del mundo representante realizan la representación,
5º la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.

En buena parte de los casos importantes uno o ambos de los mundos pueden ser entidades hipotéticas e, incluso, abstracciones» .

Algunos interrogantes abiertos que se derivan de este planteamiento son: ¿dónde surgen los conceptos matemáticos? ¿dónde se ubican? ¿qué objetividad tienen? ¿qué relación guardan con sus representaciones? ¿cómo se aprenden los conceptos matemáticos?

El espejo es la superficie que muestra esta paradoja de ausencia-presencia. Esta paradoja se resume y expresa en la *dualidad representante- representado*. La anterior lectura de Kaput pone de manifiesto una posible consideración peligrosa de la noción de representación. Esas ideas permiten postular un planteamiento realista para los conceptos matemáticos, como objetos con existencia propia en algún mundo conceptual trascendente, a los cuales tenemos acceso mediante sus representaciones.

REPRESENTACIONES MENTALES

Representar es reproducir en la mente. Este supuesto se derivó de los cambios que, en el siglo XVII, se produjeron en la interpretación de los mecanismos de la percepción: el rayo visual que, supuestamente, salía del ojo y «palpaba» los objetos, se transformó en rayo luminoso que penetraba en el ojo e «introducía» las imágenes de los objetos en la retina y, de ahí, en la mente del hombre. Esta teoría de la percepción llevó nuevas dificultades para la noción de representación. ¿Cómo se reproduce en la mente la realidad exterior?

La dificultad de la pregunta ha llevado a buscar distintas soluciones. Por un lado, al tratar de entender los mecanismos de la representación, se multiplicaron las etapas y los intermediarios (teorías del homúnculo interior). Por otra parte, la imagen o idea del objeto se distanció de él en cuanto fue necesario concentrarla en los signos y en las palabras. Finalmente, se llegó a postular que toda la actividad mental se reducía a la representación, corriendo el riesgo de transformar las representaciones en objetos puramente mentales en los que el representante, finalmente, se representa sólo a sí mismo y no a una realidad exterior, que resulta inaccesible. Berkeley mostró las consecuencias más radicales de este supuesto.

El interés de las representaciones mentales es reconocido por gran parte de la comunidad de los investigadores en Didáctica de la Matemática, aquellos que de manera mas o menos amplia suscriben el paradigma cognitivo.

«*Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean* *externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (...) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas*» (Hiebert y Carpenter, 1992). Con diferentes matices, diversos autores aceptan esta distinción. Así, Kaput (1992) considera *un mundo de operaciones mentales y un mundo de operaciones físicas*, mientras que Duval (1993) postula la existencia del mundo *de las representaciones mentales y el de las representaciones semióticas,* y sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas.

En estos casos las representaciones desempeñan un papel destacado para los procesos de construcción de conceptos y, por ello, son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático; de ahí el interés que tienen para la investigación en educación matemática (Hitt, 1997).

Sin embargo, una de las mayores dificultades para un uso productivo de esta dualidad radica en el carácter conjetural e hipotético de las representaciones internas o, dicho de otro modo, su naturaleza de inobservables. Si el riesgo para el filósofo es el solipsismo, para el científico es un escepticismo radical sobre la necesidad de postular las representaciones mentales.

Esta paradoja se resume en la dualidad *representación mental- representación externa*, y plantea nuevos interrogantes:

las representaciones internas ¿son necesarias o prescindibles? ¿qué relaciones mantienen con las representaciones externas? ¿qué papel desempeñan estas representaciones en educación matemática? ¿y en la investigación? ¿qué papel desempeña el paradigma cognitivo en la postulación de las representaciones mentales?

DIVERSOS TIPOS DE REPRESENTACIONES.

Representación visual versus representación conceptual. Una vez reconocida la imposibilidad de construir un mundo real a partir de nuestras representaciones, la filosofía aceptó que lo percibido precede a la imagen que lo replica y que, en el origen, está la palabra. La representación como copia, imagen, huella o concepto se basa siempre en una teoría del signo. La historia de la filosofía considera en la idea la representación de la cosa, y en la palabra la representación de la idea. La palabra es un complejo representativo e incluye cuatro tipos: la palabra oida, la palabra emitida, la palabra escrita y la palabra leida. De ahí que las representaciones verdaderas se puedan reducir a una imagen visual, que remite directamente a una cosa, y a una forma verbal que propone el sentido de la cosa mediante un concepto.

Dentro de los modos convencionales de representación es usual distinguir dos grandes familias de sistemas: *representaciones simbólicas* y *representaciones gráficas.* Entre las primeras se encuentran las representaciones de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento. Los sistemas de representación gráficos recogen las representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación (Castro y Castro, 1997).

Esta paradoja se relaciona con la dicotomía *representación visual- representación simbólica*. La dualidad de las representaciones es un intento de capturar con pocas variables toda la complejidad de situaciones y mecanismos de representación. Algunos de los interogantes que produce son: ¿cuántos tipos de representaciones se pueden establecer? ¿cuáles son sus principales variedades? ¿cuándo se puede afirmar que algo representa a un concepto matemático? ¿cuáles representaciones son mas adecuadas? ¿hay diferencias entre un modelo y una representación del mismo concepto? ¿las hay en matemáticas?

NITIDEZ DEL SIGNIFICADO Y ARBITRARIEDAD DE LA REPRESENTACIÓN

Representar es atribuir significado, ubicarse en un sistema. El concepto no es algo externo, objetual, sino un significado que ocupa el centro de un espacio semántico. El principio de realidad no es la representación de una exterioridad física o de una idea trascendente, sino la representación de un espacio semántico en el que las palabras y los signos, disputando su sentido, se hacen cargo del mundo, dibujan en él fuerzas, fijan sus núcleos a través de un juego de análisis y síntesis. La representación, no es una mera imagen especular sino que toma sentido dentro de un sistema de significados y relaciones.

En la filosofía contemporánea, el término *representación* se emplea para referirse a *cualquier cosa que puede evaluarse semánticamente* (Dancing y Sosa, 1993). De las representaciones puede decirse: que son verdaderas, que se refieren a, que son verdaderas de algo, que son acerca de algo, que son precisas, etc. *Contenido es* el término técnico utilizado para denominar *aquéllo que en una representación la hace semanticamente evaluable*; así, de un enunciado se dice que tiene como contenido una proposición o condición de verdad; de un término se dice que tiene un concepto como contenido; de una gráfica que expresa una relación adecuada entre sus componentes. Desde este planteamiento son representaciones las expresiones simbólicas, enunciados, diagramas, gráficos y otras notaciones usuales de las matemáticas ya que cada una tiene un contenido cuyo significado se puede establecer y evaluar; estos contenidos son objeto de estudio en matemáticas.

En cualquier dominio conceptual, y tal es el caso de las matemáticas, las representaciones convencionales contextualizadas (signos dotados arbitrariamente de sentido) hacen presentes a los conceptos (Puig, 1994). La representación es, justamente, la condición para establecer cualquier tipo de objetividad (Ibarra y Mornann, 1997). Pero las matemáticas no se pueden reducir a los simples sistemas estructurados de codificación mediante signos o gráficas. El modo específico de representar en matemáticas permite manipular y procesar esas representaciones de manera que los distintos modos de manipulación expresen, a su vez, diversas propiedades y relaciones estructurales entre los conceptos e ideas representados. Las representaciones matemáticas conllevan un modo dinámico de procesamiento, que las dota de una potencia incuestionable.

Si bien la representación de un concepto matemático consiste en hacerlo presente mediante unos signos específicos, convencionales y contextualizados, con unas reglas sintácticas de procesamiento, dicha representación con sus reglas no agota el concepto sino que sólo pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes. La moderna conceptualización de las matemáticas está basada en las nociones de estructura y de sistema; no nos referiremos a conceptos matemáticos, simplemente, sino a sistemas o estructuras. Una estructura matemática es un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de composición y de unas relaciones mediante las que se comparan y organizan dichos entes; la consideración conjunta de los entes, sus operaciones y sus relaciones es lo que caracteriza una estructura (Feferman, 1989).

La representación de una estructura matemática ha de tener tambien carácter sistémico (Kaput, 1987), por ello hablamos de sistema o sistemas de representación cuando nos referimos a una estructura matemática en su totalidad (Rico, Castro y Romero, 1996).

Pero ¿hasta que punto las convenciones predominan en un sistema de representación? ¿qué objetividad transmiten los sistemas de representación? ¿qué muestran y qué ocultan? ¿qué ponen de manifiesto?; la convencionalidad del sistema ¿justifica la arbitrariedad? ¿cómo el dominio de unas convenciones permite determinar la profundidad de una comprensión?

Esta paradoja se resume y expresa en la *dualidad objetivo- convencional.* Apunta hacia la construcción social del conocimiento. El tejido de signos con el que envolvemos la realidad dibuja la extensión de nuestras formas y los límites de nuestra realidad. De modo que no hay hechos, sino sólo interpretaciones. La interpretación es la sustancia de la vida intelectual. Nada asegura que lo sentido y lo concebido sean isomorfos, que las representaciones sensibles y conceptuales estén en correspondencia.

DIVERSIDAD DE REPRESENTACIONES

Representar es una práctica y abarca una multiplicidad de opciones. La representación es un acto creador, consiste en cambiar de aspecto un mismo dato para verlo de otro modo. No se trata de un cuadro mental, interior e incomunicable, sino el esfuerzo por recoger la polisemia de lo percibido, el desplazamiento que permite modificar su aspecto. No es un estado sino una práctica, una técnica, una manera de tratar lo percibido y lo pensado. Cada tipo de representación se crea su propio objeto, sin medida común que permita reunirlos a todos. La disyunción entre lo que veo allá, pero no puedo decir, y lo que digo aquí sin hacerlo ver, no es mas que la réplica en el seno mismo de la representación. Lo real no está dado, lo confeccionamos en figuras cambiantes.

Ninguna será verdadera, la representación no tiene modelo, no reproduce nada, hace por sí sola todo el original, ella es la creación (Eaudeau, 1999).

Siguiendo a Wittgenstein (1988) cuando reflexiona sobre los «diversos juegos de lenguaje matemáticos», es posible sostener que cada concepto matemático viene establecido por sus diferentes significados y usos y, por tanto, por diversas representaciones. Son los usos de cada concepto los que establecen por extensión su campo semántico, y cada modo significativamente distinto de entender un concepto necesita de un sistema de simbolización propio, de algún modo de representación para ser distinguible.

Desde una perspectiva cognitiva esta reflexión implica que cada concepto o estructura matemática necesita para su total comprensión del empleo y juego combinado de más de un sistema de representación. No es usual considerar cuáles son los aspectos y propiedades de un concepto que se destacan mediante cada tipo de simbolización. Cada uno de los modos de representación, junto con las reglas que los acompañan, propone una caracterización distinta del correspondiente concepto. Identificar los conceptos con cualquiera de sus representaciones es una simplificación escolar, inadecuada para la investigación en educación matemática. Por ello se deben diferenciar varias representaciones en cada concepto.

Característica distintiva de los conceptos y estructuras matemáticas es la necesidad de emplear diversas representaciones distintas para captarlos en toda su complejidad, como han puesto de manifiesto distintos investigadores (Janvier, 1987; Kaput, 1987; Golding, 1993; Castro, 1994; Romero 1995, Ruiz, 2000). Duval (1993) sostiene la necesidad de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático y establece que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como lo son los objetos comúnmente llamados físicos. Esto lleva a la necesidad de considerar las relaciones entre los diversos sistemas de representación para un mismo concepto. Janvier habla de traducción (*translations*) entre distintos sistemas, mientras que Duval se refiere a estas relaciones con el término *conversión*.

Esta paradoja se resume y expresa en la ***dualidad univocidad- pluralidad.***

Entre los interrogantes que se pueden plantear tenemos los siguientes: ¿cómo seleccionar los sistemas de representación adecuados para cada concepto y cada edad? ¿cómo abordar determinadas dificultades de comprensión mediante el juego de las representaciones? ¿cómo profundizar sobre los conceptos? ¿qué oculta y qué muestra cada sistema de representación?

CONCLUSIÓN

El análisis conceptual iniciado y las cinco paradojas señaladas son un avance que resume parte de la complejidad de las nociones de representación y comprensión. De algún modo, las dicotomías contempladas afectan al uso del término representación. Si bien es cierto que cada disciplina puede marcar un significado más preciso para esta noción y establecer los usos aceptados que van a tener legitimidad en su práctica, no es menos cierto que hay toda una tradición de pensamiento que atribuye una gran diversidad de significados a esta y otras nociones conexas, que afectan al uso coloquial y cotidiano del concepto y que contaminan su empleo en la práctica.

Cuando se trata de conceptos como los que nos ocupan, que tienen un peso importante en el desarrollo de la investigación reciente en Didáctica de la Matemática, la reflexión detallada y la discusión a fondo se hacen necesarias. Por ello es interés de este seminario continuar con la reflexión iniciada, de modo que se pueda avanzar en el debate centrado en los siguientes puntos:

c) Interés general que tienen estas nociones para la investigación en didáctica de la matemática.
d) Interés particular que tienen estas nociones para la investigación en didáctica de la matemática. Punto de vista que se asume.
e) Ejemplificación del uso de las nociones de representación y comprensión en investigaciones concretas realizada por cada ponente.
f) Cuestiones abiertas. Evaluacion critica de otras opciones.

REFERENCIAS

Baillé, J. et Maury, S. (1993) Les Représentations Graphiques dans l'Enseignement et la Formation. *Les sciences de l'education*, 1-3. Universidad de Caen: C.E.R.S.E.

Behr, M.; Lesh, R. Post, T. & Silver, E. (1983) Rational Number Concepts. En R. Lesh, y M. Landau (edts.) *Acquisition of Mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.

Biehler, R. Scholtz, R., Strasser, R & Winkelmann, B. (1994) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Acad. Pub.

Carpenter, T.; Fennema, E. & Romberg, T. (1993) *Rational Numbers. An Integration of Research*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Castro, E. (1994) *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)* Tesis Doctoral. Granada: Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1997) Representaciones y modelización. En L. Rico (edt.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona; Horsori.

Coriat, M. y Scaglia, S. (2000) Representación de los números en la recta. *Enseñanza de las Ciencias,* v. 18-1

Cuervo, R. J. (1998) *Diccionario de construcción y régimen de la lengua castellana.* Tomo II. Barcelona: Herder.

Dancing, J. & Sosa, E. (1993) *A Companion to Epistemology*. Oxford: Blackwell.

Descartes, R. (1990) *Discurso del método.* Madrid: Tecnos.

Duval, R. (1993) Semiosis et Noesis. En *Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa*. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1999) *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Eaudeau, C. (1999) *La paradoja de la representación*. Buenos Aires: Paidós.

Feferman, S. (1989) *The Number Systems. Foundations of Algebra and Analysis*. New York: Chelsea Publishing Company.

Fernández, F. (1997) *Evaluación de competencias en álgebra elemental.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Ferrater, J. (1981) *Diccionario de Filosofía*. Madrid: Alianza

Gairín, J.M. (1998) *Sistemas de representación de números racionales positivos.* Tesis Doctoral. Zaragoza: Universidad de Zaragoza

Glaesersfeld, v. E. (1995) *Radical Constructivism.* London: Falmer Press.

Goldin, G. (1993) The IGPME Working Group on Representations. En *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psicology of Mathematics Education*. Tsukuba: University of Tsukuba.

González Mari, J. L. (1995) *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Guttenplan, S. (1994) *A Companion to the Philosophy of Mind*. Oxford: Blackwell.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992) Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (edt.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Company.

Hitt, F. (1997) *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum.* Conferencia pronunciada en el XI Relme. Morelia, Michoacán, México (sin publicar).

Ibarra, A. y Mormann, T. (1997) *Representaciones en la ciencia*. Barcelona: Ediciones del Bronce.

Janvier, C. (1978) *The Interpretation of complex cartesian graphs representing situations -studies and teaching experiments*. Doctoral Dissertation. Nottingham: University of Nottingham.

Janvier, C. (edt.) (1987) *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kant, E. (1978) *Crítica de la razón pura.* Madrid: Alfaguara.

Kaput, J. (1987) Representation Systems and Mathematics. En C. Janvier (edt.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kaput, J. (1992) Technology and mathematics education. En Grouws, D.: *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Mac Millan.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989) El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias* v. 7, nº 3.

Krings, H., Baumgartner, H. y Wild, Ch. (1979) *Conceptos fundamentales de filosofía*. Barcelona: Herder.

Llano, A. (1999) *El enigma de la representación*. Madrid: Síntesis.

Palmer, S. (1977) Fundamental aspects of cognitive representation. En Rosch, E. & Lloyd, B. (edts.) *Cognition and categorization*. Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Platón (1988) *República*. Madrid: Gredos.
Puig, L. (1994) Semiótica y matemáticas. *Eutopías*, v. 51. Valencia.

Radford, L. (1998) On signs and representations. A cultural account. *Scientia Pedagogica Experimentalis*. XXXV, 1.

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1990) *Vocabulario Científico y Técnico*. Madrid: Espasa Calpe.

Rico, L. (1995) *Conocimiento Numérico y Formación del Profesorado*. Granada: Universidad de Granada.

Rico, L; Castro, E. y Romero, I. (1996) The Role of Representation Systems in the learning of Numerical Structures. En A. Gutiérrez y L. Puig (edts.) *Proceedings of the Twentieth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* Vol.1. Valencia: Universidad de Valencia.

Rico L. y Sierra, M. (2000) Didáctica de la Matemática e Investigación. En Carrillo, J. y Contreras, L.: *Matemática española en los albores del siglo XXI.* Huelva: Editoria Hergué

Romero, I. (1995) *La introducción del Número Real en Educación Secundaria.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Ruiz, F. (2000) *La Tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación.* Tesis Doctoral Granada: Universidad de Granada.

Seco, M., Andrés, O. y Ramos, G. (1999) *Diccionario del español actual.* Madrid: Aguilar.

Shell Centre (1986) *The language of functions and graphs: An examination module for secondary school*. Manchester: Joint Matriculation Board.

Sierpinska, A. (1994) *Understanding in Mathematics*. London: Falmer Press.

Skemp, R. (1980) *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid: Morata.

Wittgenstein, L. (1988) *Investigaciones filosóficas*. Madrid: Alianza.