Una perspectiva didáctica en la iteración de funciones y el punto fijo

FLOR M. RODRÍGUEZ.

Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales.
Facultad de Educación. Universidad de Salamanca.
a164190@aida.usal.es

Resumen:

El presente escrito describe parte de un trabajo de investigación[1] *en didáctica del análisis matemático, con el objeto de explorar las formas en que estudiantes universitarios de niveles avanzados hacen uso de recursos visuales para determinar, anticipadamente, convergencia de funciones iteradas en el marco de una particular interpretación del teorema del punto fijo.*

Se parte del supuesto de que la visualización es una forma de desarrollar el pensamiento matemático, de tal manera que, el objeto didáctico radica en proporcionar al estudiante un medio para dirigirlo hacia el significado de convergencia a partir de situaciones del tipo $x_n = f(x_{n-1})$*. En general se pretende favorecer las acciones de enseñanza para generar aprendizajes más significativos.*

Abstract:

This paper describe a research in didactical of mathematical analysis, which the main aim is to explore the ways in which universities students of advanced grades use visuals recurs to decide, previously, concurrence of iterates functions in the frame of a particular interpretation of the point fixed theorem.

We part supposing that the visualization is a form to development the mathematical thinking, the didactical objective is provide to the student an environment for carrying toward the mean of concurrence from situations like $x_n = f(x_{n-1})$*. In general, the main goal is to assist actions on the teaching to generate more significant apprenticeship.*

Introducción

En didáctica, la sociedad evoluciona de acuerdo a sus necesidades, modificando sus formas de enseñanza y adecuándolas a los tiempos. Así por ejemplo en matemáticas la sociedad contemporánea busca mejores técnicas de enseñanza que favorezcan en los estudiantes un aprendizaje más efectivo de tal forma que éste sea capaz de usarlo y aplicarlo en contextos convenientes. La didáctica de la matemática es una disciplina que se encarga del estudio de fenómenos como el anterior, permitiendo la exploración de procesos propios en la

[1] Para detalles ver Rodríguez (2003).

construcción de conocimiento que son apoyados por los referentes cualitativos teóricos y empíricos de la misma disciplina. De aquí que, la investigación que se reporta surge de la convicción de que la investigación sobre fenómenos didácticos es una necesidad urgente, en virtud de que se quieren alcanzar logros tanto científicos como tecnológicos que hoy por hoy son prioritarios.

La investigación se llevo a cabo en varias etapas, enfocando la atención en la interacción implícita que existe entre los agentes inmediatos del medio escolar. Específicamente el estudio descansó sobre el tópico de las funciones recursivas analizando regularidades en el tratamiento de nociones como convergencia y divergencia desde una perspectiva dinámica, concentrando la atención en el teorema del punto fijo. En este sentido, se plantea la hipótesis de que a pesar del dominio de la noción de pendiente de una recta e "inclinación" de una curva que se tiene en las clases de cálculo diferencial e integral, no existe una sistematización de los contextos en los cuales se les puede vincular.

Se realizó el diseño de una secuencia de actividades cuyo objetivo fue priorizar la construcción de conocimiento en interacción con los actores didácticos (estudiante, profesor y saber) de tal manera que la predicción, como una práctica social, le permitiera a los estudiantes reconocer cuando una sucesión es convergente o no, mediados por fenómenos de visualización.

Como se observa, la investigación se ocupa de una problemática que plantean los aprendizajes ligados a conceptos matemáticos como convergencia, recursividad y visualización, con un tratamiento didáctico que se apoya tanto en la teoría de situaciones fundamentales adaptada a la matemática avanzada como en una aproximación que incorpora elementos epistemológicos, didácticos, cognitivos y sociológicos del saber matemático escolar.

El problema objeto de estudio

Desde la antigüedad se han favorecido los métodos "exactos" en detrimento a aquellos en que la aproximación resulte pertinente, sin embargo, algunas veces es necesario acudir a estos últimos para la resolución de ecuaciones no lineales que no pueden resolverse con métodos exactos, entre ellos están el de Newton, secantes, bipartición y aproximaciones sucesivas que tratan con funciones del tipo $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, es decir, con sucesiones recurrentes, y con ello se genera un proceso iterativo. La cuestión se centraliza entonces en:

¿Cómo los estudiantes podrían predecir la convergencia o divergencia de una sucesión recurrente utilizando estrategias de visualización?

Para contestar a la pregunta, la tecnología juega un rol substancial en el desarrollo de procesos de visualización dentro de la temática abordada, Devaney (1990) asegura que el proceso de *iteración* que pertenece a un aspecto de los sistemas dinámicos es imposible trabajar sólo con lápiz y papel, pero que es extremadamente fácil trabajar la iteración con calculadora u ordenador.

Como *objetivo* nos planteamos estudiar el papel que la visualización desempeña, situados al seno del análisis numérico, por parte de los estudiantes de la noción de convergencia de las funciones iteradas, con apoyo en una interpretación del teorema del punto fijo.

Una de las propiedades más importantes y más comunes para justificar los métodos iterativos es el Teorema del Punto Fijo de una Contracción (Porter, 1981). El teorema afirma que dada una función F, ésta tendrá un único punto fijo de convergencia, es decir, que habrá un valor de x tal que $F(x) = x$.

Teorema. Sea $F(x)$ una función continua definida en algún intervalo $\mathrm{a} \le x \le \mathrm{b}$, tomando sus valores adentro del mismo intervalo, $\mathrm{a} \le F(x) \le \mathrm{b}$. Supóngase que para alguna constante $\mathrm{K} < 1$ se tiene,

$$| F(x) - F(y) | \le \mathrm{K} \, | x - y |$$

para todo x, y en este intervalo. Entonces F tiene un único punto fijo a.

Este punto fijo se puede calcular como el límite,

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n$$

donde,

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

empezando con cualquier punto x_0 entre a y b como el valor inicial de la iteración.

Estudiando detalladamente el teorema se puede deducir el siguiente resultado:

Corolario. Si $F(x)$ es continuamente diferenciable en algún abierto que contenga al punto fijo ξ, y si $|F'(\xi)| < 1$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ de modo que la iteración de punto fijo con $F(x)$ converge siempre que $|x_o - \xi| \le \varepsilon$. Para algún x_0 en al abierto.

Observemos que para predecir la convergencia es suficiente la condición $|F'(\xi)| < 1$, sin embargo, esta propiedad se utiliza hasta la práctica del cálculo del punto de convergencia, sin dar explicación del por qué es así, motivo por el que enfatizamos en la condición de diferenciabilidad planteada en el corolario de tal forma que el estudiante visualice la condición en un contexto gráfico aplicándola a la predicción que realice de convergencia o no – convergencia de alguna sucesión.

Soportes teóricos y aspectos metodológicos

La principal problemática se fundamenta en la ausencia de significado de los conceptos elementales matemáticos y en el dominio de éstos en el nivel medio superior y superior, los cuales subyacen para el aprendizaje de conceptos matemáticos avanzados. De aquí que, los estudiantes no están familiarizados con los conceptos básicos como para dominarlos y darles uso en el tratamiento de conceptos matemáticos avanzados y en este sentido, se considera un concepto elemental y básico el de derivada de una función, el cual se sabe lo es en el nivel superior para estudiantes que llevan estudios a fines con matemáticas. Éste se reporta débil en algunas investigaciones, por ejemplo Mirón (2000) reporta que existe ausencia de significado del concepto de derivada y para un robustecimiento de tal noción plantea la hipótesis de que es en el contexto interactivo donde el estudiante será capaz de reconstruir significados de la derivada a partir de la identificación de patrones gráficos.

Al respeto del punto fijo, Sierpinska (1994) reporta que hay dificultad sobre tal noción cuando se les pide a los estudiantes obtener el punto fijo de funciones a trozos. Por lo tanto, se plantea la existencia de la ausencia de significado sobre el papel que juega la derivada en el teorema del punto fijo de una contracción.

Acotando la problemática se decidió encauzar la atención en un problema 'viable' para reconocer cómo la visualización es una forma de predecir resultados matemáticos. Particularmente sostenemos que la "inclinación" de una curva es un medio para predecir la convergencia o divergencia de una sucesión que proviene de una función iterada. Y aunque en los teoremas y ejemplos de los textos escolares, lo anterior se explicita ya sea con la condición de Lipschitz o con el criterio de la derivada analíticamente, no se pone suficiente énfasis en la visualización de tales condiciones. De este modo, la hipótesis de investigación radica en la proposición:

Aunque los estudiantes dominan las técnicas[2] *para decidir convergencia o divergencia de una iteración, algunos no acuden sistemáticamente a la "inclinación de la gráfica" como un elemento visual en la práctica escolar.*

Se considera que la visualización es un factor importante que podría generar heurísticas para el desarrollo de prácticas escolares (Davis, 1993; Hodgson, 1996; Zimmerman y Cunningham, 1991; Bosquez, 1994; López, 1994). En particular, se asume que la visualización permite establecer vínculos sobre el contexto analítico y el contexto gráfico, de tal forma que se reformule el papel implícito que juega la pendiente de la recta tangente en el teorema del punto fijo. La visualización es una parte esencial de la inteligencia humana, y por lo tanto el desarrollo visual que ocurre a partir de una aproximación fenomenológica para el aprendizaje de las matemáticas puede dar al estudiante un mejor entendimiento de los contenidos matemáticos. (Cantoral y Montiel, 2001)

Justo por considerar a la visualización generatriz de conocimiento con base en la práctica de predecir, se considera que el estudiante puede ser constructor de su propio conocimiento, por lo que necesariamente se creó la necesidad de generar interacciones entre estudiante, investigador y saber, y en este sentido la aproximación epistemológica[3] ayudó a interpretar los fenómenos suscitados en el desarrollo de la investigación. Asimismo la Teoría de Situaciones Didácticas[4] sustentó la hipótesis consolidando y relacionando los portentos involucrados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular, en el tópico antes referido.

El vínculo entre la problemática planteada y los soportes teóricos, se establece debido a que la aproximación socioepistemológica sostiene que las actividades y prácticas sociales son las que producen conocimiento. En este sentido, la predicción como práctica social será una propiedad para determinar con base en la visualización, la concurrencia de una sucesión

---

[2] Estás técnicas son aquellas del tipo algebraico que se enseñan habitualmente en el curso de cálculo a estudiantes de bachillerato y en análisis matemático a estudiantes de primeros cursos en la licenciatura de matemáticas. La conjetura radica del lado de los sistemas dinámicos, dando pie a heurísticas del contexto gráfico como una aproximación a la predicción de convergencia.

[3] La Aproximación Socioepistemológica asume que el fenómeno educativo es de naturaleza eminentemente social. Para detalles ver Cantoral, R. et al (2000)
Aproximación teórica en desarrollo por investigadores del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

[4] Para detalles ver Brousseau, G. (1986)

iterada. Aunado a la teoría de situaciones didácticas, se establecen las relaciones humanas pertinentes en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, para que el alumno construya su conocimiento mediado de sus propias experiencias y de sus interacciones con el entorno como factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios.

Al respecto de la metodología seguida, la secuencia de actividades fue diseñada con base en la ingeniería didáctica.[5] En esencia se contemplaron las siguientes fases que considera Farfán (1997):

- Un *análisis preliminar* de la situación a abordar involucrando tres componentes: la componente *didáctica*; la componente *epistemológica*; y la componente *cognitiva*.
- El diseño de la ingeniería didáctica y la elección de variables a ponerse en juego.
- La puesta en escena y *análisis de resultados*.

Las fases vinculan con las dimensiones en la construcción de conocimiento que establece la aproximación teórica antes referida, a saber, las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social. Puntualmente las dimensiones se consideraron de la siguiente manera:

Dimensión didáctica. Acerca del estado de la enseñanza. Se consideró el análisis de algunos textos que atienden en uno de sus particulares al teorema del punto fijo de una contracción, se analizó un curso específico de sistemas dinámicos.

Dimensión epistemológica. Explicación del devenir del contenido matemático en juego.

Dimensión cognitiva. Asociada a las características cognitivas de la población a la cual se dirige la enseñanza. Aplicación y análisis de una secuencia de actividades preliminar, con el objeto de conocer cuáles son dichas características y acotar las variables de control del diseño de actividades.

Dimensión social. Referente a la construcción social del conocimiento, correspondiente a una epistemología en su organización social.

El diseño didáctico

Por lo general los estudiantes tienen dificultad para comprender la esencia del Análisis Numérico debido a que es una asignatura que tiene características propias que se diferencian de otras materias dictadas en la carrera de matemáticas; en efecto, en él no existen siempre verdades aplicables a todas las situaciones y la pertinencia o no de utilizar distintas herramientas para resolver un problema depende fuertemente del contexto en el cual se va a utilizar. Esto implica que deben desarrollarse otras habilidades para resolver los problemas, heurísticas diferentes a las que el alumno esta acostumbrado.

Cabe mencionar que la población a la que se aplicó consistió de 17 estudiantes del 9º semestre de la carrera de matemáticas[6], que cursó la materia de sistemas dinámicos un semestre anterior. Se analizaron los contenidos que trabajaron y se hizo retroalimentación cuando se creyó necesario.

El objetivo general del diseño de una situación de aprendizaje fue intervenir en la reconstrucción del significado del teorema del punto fijo, por lo que se pensó en un diseño

[5] Para detalles ver Artigue, M. (1995)
[6] Estudiantes de la carrera de matemáticas de la Universidad Autónoma de Veracruz, México.

adaptable al proceso de convergencia cuando éste es tratado a partir de funciones iteradas tal y como se plantea en dicho teorema.

Se estimó que la puesta en escena constara de 4 etapas: con la primera etapa, se da cuenta de las dificultades presenciadas en lo que punto fijo se refiere (la investigación de Sierpinska (1994) es el modelo base para llevar a cabo esta primera etapa); en la segunda y tercera etapa se realizaron actividades con la tecnología[7] en lo que a nosotros conviene, es decir, suministraremos un importante recurso para observar el comportamiento del método numérico en la iteración con sus correspondientes interpretaciones geométricas y analíticas, abasteciendo la ventaja de poder realizar distintas experiencias en un tiempo relativamente corto y abarcando la mayor cantidad de designios; y en la cuarta etapa se abordó la temática en cuestión para validar y recapitular desde nuestra perspectiva hacia el tema, explicitando contenidos analíticos y visuales.

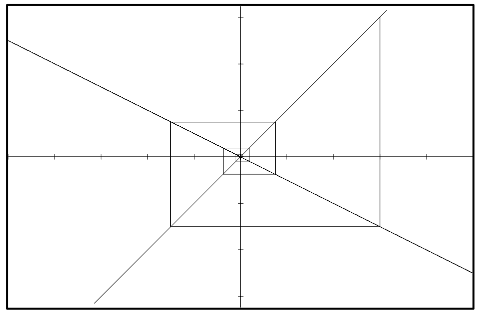
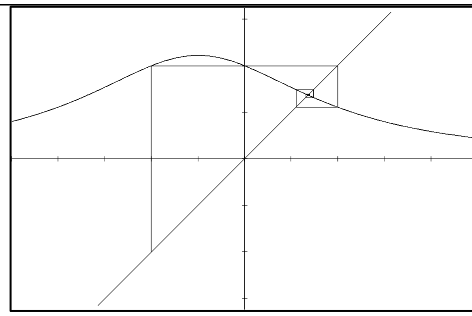
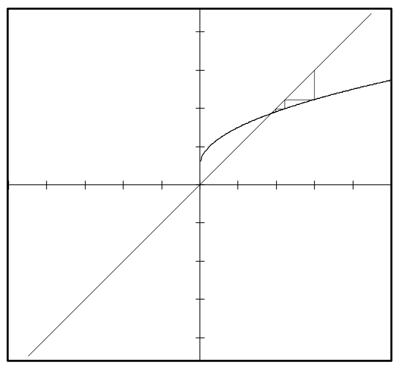
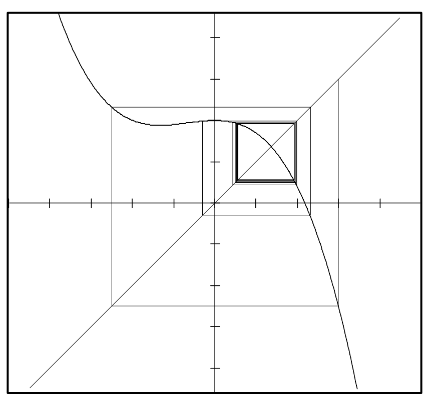
Como he mencionado se pretende que el estudiante sea capaz de dar sentido al significado que en el contexto gráfico y numérico se asigna a los procesos recursivos y el papel que toma la dimensión de la derivada en ambos. De aquí que, se diseñaron tres hojas de trabajo para llevar a cabo la implantación de la secuencia de actividades.

El primer bloque, tuvo como objetivo el conocer las nociones previas del estudiante respecto del punto fijo, convergencia y derivada. El segundo bloque tuvo como objetivo establecer un desequilibrio cognitivo de tal forma que el estudiante asigne sentido a la propiedad de la pendiente de una curva en el teorema del punto fijo, con la pretensión de que el estudiante trabajara con las nociones precedentes desde la perspectiva de herramienta, es decir, se plantea una **situación de acción** en la cual el estudiante conviene explorar el contenido matemático referente a sus nociones previas. La expectativa va en el sentido de que sean ellos mismos los que descubran la intención planteada a partir de una **situación de formulación**, en la cual, se incite al estudiante a la revelación explícita del contenido en la primera situación, con ello entonces, se establece una **situación de validación** en la que el estudiante viablemente tratará de dar significado propio al objeto matemático en cuestión. Por último, en el tercer bloque el objetivo radicó de manera sistémica en que el estudiante reconociera la **propiedad de predicción**, más concretamente se buscó que el estudiante establezca las relaciones entre magnitud de la derivada y la forma de la gráfica.

A continuación se muestra una de las actividades fundamentales para validar una efectiva apropiación de conocimiento.

Instrucción:
Haz corresponder correctamente en una terna las siguientes gráficas iterativas con su respectiva función iteración y el tipo de punto fijo correspondiente. Explica el criterio que adoptaste para hacerlo.

[7] Específicamente se trabajó con calculadoras con capacidad gráfica.

1. $x_n = \dfrac{(20 - 2x_{n-1}^2 - x_{n-1}^3)}{10}$	2. 	3. PUNTO FIJO ATRACTOR
4. $x_n = \sqrt{x_{n-1}} + 0.5$	5. 	6. PUNTO FIJO REPULSOR
7. $x_n = -\dfrac{x_{n-1}}{2}$	8. 	9. PUNTO FIJO REPULSOR
10. $x_n = \left[\dfrac{20}{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} + 10} \right]$	11 	12. PUNTO FIJO ATRACTOR

En efecto, se pudo constatar en algunos casos el reconocimiento sistémico de la propiedad de predicción y más concretamente se observó que algunos estudiantes lograron establecer relaciones de la magnitud de la derivada y la forma de la gráfica, sin embargo, estos casos fueron minoría. Los argumentos que surgieron validan cierto patrón de comportamiento en el reconocimiento de la existencia del punto fijo, de aquí que a pesar de la amplia red de información que se les proporcionó a los estudiantes sobre la pendiente de una recta, sucesiones convergentes y punto fijo, la relación entre estudiante y saber está por debajo de un consenso en la decodificación de diversos contextos interactivos, es decir, que sistemáticamente no se aprueba la correspondencia entre dichos contextos.

Conclusión

Como se mencionó, a partir del objetivo planteado, sostenemos en particular que, la visualización es un medio para predecir la convergencia de una sucesión que proviene de una función iterada, y aunque en los teoremas y ejemplos de los textos escolares, lo anterior se explicita ya sea con la condición de Lipschitz o con el criterio de la derivada, no se pone suficiente énfasis en la visualización de tales condiciones. Justo aquí, es dónde se debate sobre el obstaculizar el desarrollo de la visualización por parte del estudiante, ya que, con base en al análisis se puede constatar que la visualización es un fenómeno que radica en todo momento de acción, formulación y validación de un saber matemático.

En la experiencia didáctica, se reflexionó sobre los procesos que de alguna manera obstaculizan al estudiante a desarrollar su capacidad de visualización, y se observó que tales obstáculos no sólo se deben a que en la enseñanza tradicional no se procede alguna práctica que la enfatice, sino también se deben al contexto en el cual los estudiantes estén situados.

Con base en el análisis de las dimensiones en la construcción de conocimiento se observó que aunque se haya trabajado en diversos contextos (gráfico, algebraico y numérico) la condición de derivabilidad para decisión de convergencia o divergencia de una sucesión, se ve debilitada en el momento de enfrentarse a casos en los cuales no hay una función “amable” en el sentido de ser derivada, asimismo se ve debilitada cuando el contexto no les permite concluir de manera formal algún proceso de razonamiento, esto es, que en efecto los argumentos que nos presentan son válidos bajo la codificación que utilizan en su medio, pero fuera de ello, a pesar de visualizar cada consecuencia con base en sus formalizaciones, ellos mismos reflejan la limitación para seguir a sus respuestas “intuitivas” basadas en su propia visualización.

Consecuente de la recolección de datos y de su análisis, se concluye que, el predominio de recurrir a la forma en cómo se les enseñó el teorema del punto fijo es una *invariante* que los estudiantes reflejan en su discurso argumentativo, lo que da lugar a limitaciones en el desarrollo de procesos visuales como un medio para predecir la convergencia o divergencia de funciones iteradas.

Se observaron algunos fenómenos didácticos que se presentan en el ámbito escolar, se constató en los estudiantes que:

- Existen tres tipos de noción de punto fijo: refiriéndolo como la intersección de la recta identidad con una curva (gráficamente), como el punto estático que una función al ser iterada establece, y como la solución de un sistema lineal de ecuaciones.
- La noción de convergencia y divergencia, se ven favorecidas por el contexto en el cual se está trabajando. Es decir, los argumentos en sus respuestas reflejan nociones de aproximación, tanto numéricamente como gráficamente.

- El concepto de derivada, se registra visualmente como la recta tangente a una curva en algún punto y no propiamente como una magnitud.

La última observación nos permitió reafirmar una vez más la no – utilización de la derivada como un ente sistemático en diversos contextos. De tal forma que ‘en efecto’ aunque los estudiantes dominaron técnicas para decidir convergencia de funciones iteradas, el uso sistemático de la derivada se ve truncado bajo los conocimientos habituales que se tienen de la noción.

Se infiere que a pesar de existir una serie de dificultades y obstáculos en el uso sistemático de los conceptos matemáticos, específicamente el de la derivada de una curva, las acciones, formulaciones y validación de su aplicación (con base en el diseño de la secuencia de actividades), exige de heurísticas y procesos de visualización que constantemente se observaron persistentes en la solución de actividades y sin embargo se vieron debilitadas al dar un resultado propio de evaluación, es decir, señalamos que la predicción que se generó en las actividades de validación no descarta a la visualización como un medio para la toma de sus decisiones, lo cual nos hace reflexionar en verla como un fenómeno que podría estimular el pensamiento matemático en las prácticas educativas.

Referencias

ARTIGUE, M. et al. (1995) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica. SA de CV.

BOSQUEZ, E. (1994) *Visualización en las Ecuaciones Diferenciales*. Tesis de maestría, Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN. México.

BROUSSEAU, G. (1986) “Fondements et méthodes de la didáctique” en *Recherches en Didactique des Mathematiques* $7_{2.}$ pp. 33- 115

CANTORAL, R. et al. (2000) *Desarrollo del pensamiento matemático.* Trillas. México.

CANTORAL, R. y MONTIEL, G. (2001) *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Prentice – Hall.

DAVIS, P. (1993) “Visual theorems”. *Educational Studies in Mathematics* 24, pp 333-344.

DEVANEY, R. (1990) *Chaos, fractals, and Dynamics. Computer experiments in mathematics*. Department of Mathematics. Boston University. Boston, Massachussets. Addison – Wesley Publishing Company

FARFÁN, R. (1997) *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamérica, SA de CV.

HODGSON, T. (1996) “Students’ Ability to Visualiza Set Expresions: An Initial Investigation”. *Educational Studies in Mathematics* 30, pp 159-178.

LÓPEZ, L. (1994) *Desarrollo de la Visualización Matemática Tridimensional de Curvas Paramétricas.* Tesis de maestría, Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN. México.

MIRÓN, H. (2000) *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones de $f \rightarrow f'$ en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas*. Tesis doctoral. Cinvestav – IPN. México. DF.

PORTER, M. (1981) *Introducción a los métodos numéricos*. 2º Coloquio del Departamento de matemáticas. Cinvestav- IPN. Oaxtepec, Morelos.

RODRÍGUEZ, F. M. (2003) *Convergencia, recursividad y visualización.* Tesis de maestría. Cinvestav – IPN. México, DF.

SIERPINSKA, A. (1994) *Understanding in mathematics.*

ZIMMERMANN, W. y CUNNINGHAM, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America, Notes No. 19.