



INFORME DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN DEL GRUPO DE INVESTIGACIÓN “*PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO*”

Reunión intermedia (VALENCIA-2018)

Coordinador del grupo:

Antonio Codina Sánchez

En este documento describimos la actividad realizada en el seno del grupo PNA en el contexto de la reunión intermedia celebrada en la Universidad de Valencia, en Valencia los días 9 y 10 de marzo de 2018. Como viene siendo habitual, el seminario se desarrolló en dos sesiones de trabajo. Cada sesión de trabajo comenzó con dos conferencias invitadas a cargo de los Catedráticos Bernardo Gómez y Enrique Castro y 19 comunicaciones sobre investigaciones que se están realizando en diferentes universidades españolas en dos modalidades:

Tipo I: Presentación por parte de estudiantes de máster o doctorado acerca de una idea o propósito de investigación. El objetivo fue que a partir de lo presentado por el autor, recibieran sugerencias y/o ayudas sobre cómo abordar su investigación.

Tipo II: Presentación de trabajos en curso no terminados (Tesis, proyectos,...). Estas presentaciones persiguieron el intercambio de puntos de vista, orientaciones y/o percepciones sobre el trabajo, futuras sinergias y colaboraciones así como ofrecer visibilidad y difusión del trabajo entre los miembros del grupo PNA.

De esta forma y como en ediciones anteriores, el seminario fue un punto de encuentro para la discusión y análisis de trabajos en elaboración. Así, para fomentar la interacción entre los asistentes volvimos a poner en práctica el formato de discusión del último seminario intermedio. Concretamente, las comunicaciones fueron presentadas por los ponentes sin turno de preguntas. Tras ello, los asistentes se distribuían en función de las comunicaciones e interés de los mismos en pequeños grupos alrededor de los ponentes. Ello permitió conocer y discutir con mayor profundidad los trabajos en un ambiente más cercano con el autor/es, facilitando discusiones más distendidas y fortaleciendo los lazos entre los asistentes.



Las sesiones se celebraron tal y como estaba previsto y la dinámica de trabajo fue valorada positivamente. Queremos desde aquí agradecer al Comité Científico y Local el gran esfuerzo y trabajo realizado para que la reunión fuera todo un éxito. Dichos comités estuvieron formados por:

Comité Científico

Antonio Codina Sánchez. Universidad de Almería (Coordinador Grupo PNA); Juan Gutiérrez Soto. Universitat de València (Coordinador Local); Bernardo Gómez Alfonso. Universitat de València; Ceneida Fernández Verdú. Universidad de Alicante; Elena Castro Rodríguez. Universidad de Granada

Comité Local

Juan Gutiérrez Soto. Universitat de València (Coordinador); Eva Arbona Picot. Universitat de València; María Teresa Sanz García. Universitat de València; Miriam Ortega Pons. Universitat de València; Pascual David Diago Nebot. Universitat de València

A continuación detallamos el cronograma y los resúmenes de las comunicaciones presentadas tal y como fueron enviadas por los autores:

CRONOGRAMA

Viernes 9 de marzo		
Hora	Título	Autores
16:00-16:15	Apertura del Seminario	<i>Gutiérrez, J. (Coord. Local)</i> <i>Codina, A (Coord. PNA)</i>
16:15-17:15	Conferencia: "Lo que ya sabemos"	Bernardo Gómez
17:15-17:30	Pensamiento Numérico y Algebraico en la Formación de Maestros: El caso de las baldosas con botones.	De Castro, C.; Murcia, J. M.; Garrido, R.
17:30-17:45	Estudio del rol de la resolución de problemas en los materiales de diseminación del currículo chileno	Olivares, D; Segovia, I
17:45-18:00	<i>Grupos de Discusión con los Autores</i>	
18:00-18:30	Pausa Café	



18:30-18:45	Categorías del conocimiento profesional sobre resolución de problemas en educación primaria	Piñeiro, J. L.; Castro-Rodríguez, E.; Castro, E.
18:45-19:00	Modelo de enseñanza para fracciones basado en la recta numérica y el uso de applets: Estudio piloto	Valenzuela, C.; Figueras, O.; Arnau, D. Gutiérrez-Soto, J
19:00-19:15	Las fracciones, destrezas en alumnos de 15 a 16 años	Sanz, M. T.; Figueras, O.; Gómez, B.
19:15-19:30	Esbozo de una investigación sobre el origen del error de inversión y las bases neuronales subyacentes	Ventura-Campos, N.; Fernando, L.; Arnau, D.; González-Calero, J.A.
19:30-19:50	<i>Grupos de Discusión con los Autores</i>	
19:50-19:55	Una revisión del origen de la investigación en el error de inversión	De Cervelló, M.; Moreno, M.A.; Navarro, B.; Segura, C.; Arnau, D.
19:55-20:00	Estudio sobre el fenómeno natural number bias: diseño del instrumento	González-Forte, J.M.; Fernández, C.
20:00-20:05	La dificultad de los problemas de cambio: un análisis exploratorio sobre la influencia sintáctica	Garrido, J.M.; Pérez-Buj, G.; Romero-López, P.; Yáñez, D. F.; González-Calero, J. A.
20:05-20:15	<i>Grupos de Discusión con los Autores</i>	
21:30	Cena	

Sábado 10 de marzo		
Hora	Título	Autores
09:30-10:30	Conferencia: "Inferencia en la comprensión de los problemas aritméticos"	Enrique Castro
10:30-10:45	Ideas sobre Límites en alumnos de Bachillerato ante una Innovación	Pérez-Montilla, A.; Cardeñoso, J.M.
10:45-11:00	Análisis de un modelo de enseñanza para trabajar familias de funciones mediante el uso de tabletas	Ortega, M.; Puig, L.
11:00-11:15	<i>Grupos de Discusión con Autores</i>	
11:15-11:45	Pausa Café	



11:45-12:00	Estructuras identificadas por estudiantes de segundo de primaria en un contexto funcional del álgebra escolar	Torres, M.D.; Cañadas, M.C.; Moreno, A.
12:00-12:15	Identificación de rasgos de aprendizaje de pre-álgebra en estudiantes de primaria con altas capacidades matemáticas	Arbona, E.
12:15-12:30	Estudio sobre la relación complejidad-dificultad en tareas de seriación en estudiantes de educación infantil	Yáñez, D. F.; Diago, P. D.; Arnau, D.
12:30-12:45	Grupos de Discusión con Autores	
12:45-12:50	Comparación entre el límite infinito de una sucesión y el límite finito de una sucesión: requisitos matemáticos y fenomenología.	Arnal, M.; Claros, J.; Sánchez, M.T. Baeza Alba, M.A.
12:50-12:55	Estudio longitudinal de las resoluciones de problemas de estimación en alumnos de entre 10 y 16 años	Navarro, B.; Ferrando, I.
12:55-13:00	Uso flexible de estrategias en la resolución de problemas de estimación	Segura, C.; Ferrando, I.; Star, J.R.
13:00-13:10	Grupos de Discusión con los Autores	
13:10-13:15	La actuación docente en base al conocimiento previo de los escolares sobre las operaciones de la suma y de la resta	Villanueva, M.M.; Fernández, C.M.
13:15-13:20	Ansiedad ante la enseñanza de la matemática, autoeficacia en la enseñanza de la matemática y la relación existe entre ambas	Delgado, I.; Castro, E.; Pérez-Tyteca, P.
13:20-13:30	Grupos de Discusión con Autores	
13:30-13:45	Situación del grupo, Balance	Codina, A.



Conferències

Viernes 9 de marzo		
Hora	Título	Autores
16:15-17:15	Lo que ya sabemos	Bernardo Gómez

El Catedrático Bernardo Gómez realizó un paseo por los principales trabajos relacionados con el pensamiento numérico y algebraico desde el nacimiento de la disciplina de la Didáctica de la Matemática hasta los problemas actuales que afronta la misma. Durante este paseo, Bernardo perfiló ideas, conceptos, teorías, problemas, discusiones, que no por clásicos dejan de estar de actualidad. Los asistentes al seminario pudimos ver en contexto el desarrollo histórico reciente de los estudios sobre pensamiento numérico y algebraico como los problemas derivados de la terminología, distintas concepciones y puntos de vista sobre términos y tópicos específicos, el interés por el estudio y análisis de los errores, el cálculo mental, el sentido numérico, el cálculo estimado, los problemas aritméticos multiplicativos, las fracciones, etc. No cabe duda que la conferencia impartida nos abrió no solo a un mundo de conocimiento relacionado, sino también al valor de la historia más reciente para las futuras investigaciones en pensamiento numérico y algebraico.

Sábado 10 de marzo		
Hora	Título	Autores
9:30-10:30	Inferencia en la comprensión de los problemas aritméticos	Enrique Castro

El Catedrático Enrique Castro en la segunda jornada del seminario impartió una conferencia sobre un tópico específico. Para ello partió de una pregunta de investigación amplia: ¿Qué papel juega la inferencia en la resolución de problemas? Enrique sugirió partir de la idea propuesta por Bruner (1974) al señalar que la inferencia es “ir más allá de la información dada” para ir enlazando un conjunto de reflexiones, desde la perspectiva micro y macro, sobre la inferencia en la comprensión de los problemas aritméticos, los tipos de inferencias, la inferencia de regularidades o la inferencia relacional. Su conferencia puso de relieve la gran cantidad de preguntas abiertas que aún están por estudiar en relación a la inferencia y la resolución de problemas.



Resúmenes

A continuación se muestran los resúmenes de las contribuciones tal y como han sido enviados por los autores

Viernes 9 de marzo		
Hora	Título	Autores
17:15-17:30	Pensamiento Numérico y Algebraico en la Formación de Maestros: El caso de las baldosas con botones.	De Castro, C.; Murcia, J. M.; Garrido, R.

Palabras clave: Pensamiento Numérico, Pensamiento Algebraico, Didáctica de las Matemáticas, Formación de Maestros, Propiedades de las operaciones, Multiplicación

Se presentan dos estudios exploratorios relacionados entre sí, basados en la tarea de determinar el número de círculos (los botones) mostrados en una fotografía en que se observan varias baldosas táctiles de botones. Uno de los estudios está realizado con alumnos de finales de Educación Primaria (5º y 6º) y el segundo con estudiantes del grado de maestro de Educación Primaria.

La tarea básica de determinar el número de círculos está diseñada para admitir diversos procedimientos de cálculo que se pueden describir con expresiones aritméticas que implican la multiplicación y que pueden relacionarse entre sí mediante propiedades de la multiplicación.

Con los alumnos de primaria, la tarea se centra en determinar el número de botones, comparar procedimientos de cálculo, y evaluar expresiones aritméticas.

Con los estudiantes del grado de maestro, la tarea consiste en generar expresiones aritméticas y establecer conexiones, en un contexto didáctico, entre las propiedades de la multiplicación (asociativa, conmutativa y distributiva) con la imagen de las baldosas.

Ambos estudios exploratorios están orientados al diseño de una investigación en el enfoque de Early Algebra, dentro del ámbito del pensamiento relacional multiplicativo trabajando con igualdades. Sigue la línea de Molina (2006) y estudia aspectos de formación de maestros en el modelo MTSK.

En la presentación del PNA se presentarán los resultados del estudio exploratorio con maestros.



Viernes 9 de marzo

Hora	Título	Autores
17:30-17:45	Estudio del rol de la resolución de problemas en los materiales de diseminación del currículo chileno	Olivares, D; Segovia, I

Palabras clave: resolución de problemas, currículo, documentos de apoyo

El presente trabajo tiene como objetivo analizar cómo se abordan aspectos de la resolución de problemas en los documentos de diseminación del currículo, de apoyo al profesorado en Chile.

El currículo chileno se caracteriza por ser explícito en cuanto a sus prescripciones (Oliva, 2017). Su sistema curricular considera documentos específicos, elaborados a modo de apoyo para la comunidad educativa (MINEDUC, 2018). Estos documentos constituyen un paso intermedio ente la normativa oficial y su implementación en la sala de clases.

Según Piñeiro, Castro-Rodríguez, y Castro (2016), este es uno de los currículos con mayor nivel de explicitación en cuanto a la resolución de problemas. Sin embargo, al mismo tiempo Chile se encuentra en el tercil más bajo de los resultados en la evaluación de PISA. Cabe preguntarse entonces, ¿qué rol juega la resolución de problemas en estos documentos de apoyo?, ¿reflejan el mismo nivel de explicitación que la normativa oficial?, ¿cómo se concibe la resolución de problemas, y qué tipo de problemas promueven?

El estudio se justifica en la necesidad de indagar no sólo cuánto aparece explicitada la resolución de problemas, sino además cómo aparece y cómo se articula con todo el sistema.

Como resultados parciales, en los documentos analizados hasta el momento, se ha encontrado un predominio de la concepción ‘enseñar para resolver problemas’. También se ha hallado evidencia de imbricación de la resolución de problemas en la evaluación, entrega de orientaciones sobre el uso de problemas rutinarios y no rutinarios, y predominio de problemas rutinarios, cerrados, con aplicación a la vida real y de tipo aritmético.

Viernes 9 de marzo

Hora	Título	Autores
18:30-18:45	Categorías del conocimiento profesional sobre resolución de problemas en educación primaria	Piñeiro, J. L.; Castro-Rodríguez, E.; Castro, E.

Palabras clave: Resolución de problemas, conocimiento del profesor, educación primaria

La importancia que tiene el conocimiento del profesor en el aprendizaje de sus estudiantes es una premisa aceptada por la comunidad de educadores matemáticos. No obstante, los marcos que describen o caracterizan dicho conocimiento han dado poca



relevancia a competencias y procesos como la resolución de problemas. Algunos autores destacan que particularidades de estas competencias o procesos han sido omitidas cuando se analiza el conocimiento del profesor. En nuestro trabajo reflexionamos sobre una posible organización del conocimiento del profesor de educación primaria sobre la resolución de problemas de matemáticas. Para ello, partimos por una parte, de revisiones curriculares y teóricas que permiten establecer un significado de la competencia para resolver problemas. Por otra, nos basamos en marcos emergentes de conocimiento del profesor sobre este tópico. Nuestra categorización diferencia un conocimiento matemático del proceso o competencia y un conocimiento didáctico de esta. En la dimensión matemática, se diferencian tres componentes fundamentales: uno referido al concepto de problema, otro al proceso de resolución y un tercero a la disposición para afrontar un problema. En la dimensión didáctica distinguimos un componente referido al aprendizaje y otro a la enseñanza de la resolución de problemas. Cada uno de los componentes de ambas dimensiones presenta conocimientos específicos que lo describen.

Viernes 9 de marzo		
Hora	Título	Autores
18:45-19:00	Modelo de enseñanza para fracciones basado en la recta numérica y el uso de applets: Estudio piloto	Valenzuela, C.; Figueras, O; Arnau, D. Gutiérrez-Soto, J

Palabras clave: Modelo Teórico Local sobre fracciones, modelo de enseñanza para fracciones, fracciones en la recta numérica, objeto mental fracción.

La comunicación contiene un informe sobre resultados de un estudio piloto hecho con alumnos de 12 a 14 años, con problemas de absentismo escolar y bajo rendimiento académico, de una secundaria pública en la ciudad de Valencia. El propósito del estudio fue validar una secuencia de enseñanza basada en el uso de applets y la recta numérica como recurso didáctico y conceptual.

El diseño de la secuencia de enseñanza forma parte de una investigación en la cual se construye un Modelo Teórico Local (MTL) para las fracciones y su enseñanza. La construcción de los componentes del modelo (componente formal, de enseñanza, cognición y comunicación) constituyen un marco de referencia para la fase de experimentación del MTL. El estudio piloto descrito forma parte de esta fase.

Los resultados de la construcción del componente formal permiten identificar usos y aspectos de las fracciones. La elección de la recta numérica como recurso didáctico y conceptual es un producto de la construcción de los componentes modelos de enseñanza y cognición. Otro producto de este último es un catálogo de errores y dificultades que enfrentan los estudiantes cuando aprenden fracciones. La construcción del componente de comunicación se relaciona con el proceso instaurado entre el profesor/investigador y los alumnos vía su interacción con los applets.

Las actuaciones de los estudiantes, antes, durante y después de la enseñanza permiten afirmar que su objeto mental mejoró. Al iniciar, el objeto mental de los alumnos estaba vinculado fuertemente con el aspecto de la fracción como fracturador; ellos podían



establecer con mayor éxito una relación de fractura a partir de modelos gráficos con un todo continuo. Después de la enseñanza, los alumnos tuvieron éxito en situaciones donde subyace la fracción como medidora y número, en particular para representar fracciones en la recta numérica, caracterizarlas como propias e impropias y encontrar fracciones entre dos dadas.

Viernes 9 de marzo		
Hora	Título	Autores
19:00-19:15	Las fracciones, destrezas en alumnos de 15 a 16 años	Sanz, M. T.; Figueras, O.; Gómez, B.

Palabras clave: fracciones, modelo de enseñanza, destrezas, modelos teóricos locales.

En el marco de un proyecto de investigación que trata de evaluar las destrezas y dificultades que presentan los alumnos mexicanos de entre 15 y 18 años en los problemas descriptivos con fracciones, se presenta este trabajo que trata de enmarcar el proyecto y presentar los primeros resultados acerca de las destrezas que esta población tiene cuando trabajan con fracciones. Para ello se ha diseñado un cuestionario de siete tareas que trata de evaluar 3 conceptos, la Representación Gráfica, la Operatoria y la Resolución de Problemas. Este cuestionario se ha diseñado con el sustento teórico que nos proporcionan estudios precedentes, una revisión detallada del currículum correspondiente al curso de 1º de Preparatoria (4º ESO en España) y además las necesidades educativas para abordar los problemas descriptivos con fracciones que son el objeto final de la investigación. El análisis que aquí se presenta de los resultados es cuantitativo y cualitativo. Para realizar el análisis cuantitativo se categorizan cada una de las tareas y obteniendo patrones (individuos representativos), de cada una de esas categorías, se procede a realizar un análisis cualitativo. El cuestionario se aplica a una muestra significativa de 198 alumnos de la ciudad de México de entre 15 y 16 años de edad y sobre los resultados cabe destacar que, el manejo de las fracciones en los tres ítems considerados, tienen porcentajes de éxito muy bajos.

Viernes 9 de marzo		
Hora	Título	Autores
19:15-19:30	Esbozo de una investigación sobre el origen del error de inversión y las bases neuronales subyacentes	Ventura-Campos, N.; Fernando, L.; Arnau, D.; González-Calero, J.A.

Palabras clave: resolución de problemas aritmético-algebraicos, error de inversión, neuroeducación, resonancia magnética

La resolución de problemas es uno de los elementos centrales de la enseñanza de las matemáticas. Una línea de investigación importante en la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos (RPV) es el estudio de los procesos cognitivos cuando los sujetos traducen los problemas al lenguaje del álgebra. Un caso en que los estudiantes reconocen típicamente la información del enunciado, pero no son capaces de construir una ecuación correcta, sería el conocido como error de inversión (Clement, 1982). Los estudios realizados hasta el momento han constatado la persistencia del fenómeno, pero no se ha tenido en cuenta la importancia que tiene el desarrollo cerebral



del alumnado en el aprendizaje ni su potencial explicativo para justificar las relaciones causales observadas entre características de los problemas y su dificultad.

Varios estudios de neurociencia han examinado los procesos usados durante la RPV y cómo son adquiridos. Lee et al. (2007) en un estudio con adultos sobre la traducción de enunciados a ecuación, encontró activación en áreas cerebrales del córtex prefrontal y parietal asociadas con la memoria de trabajo y procesos atencionales. Un estudio con adolescentes y adultos durante la práctica de RPV (Qin et al. 2004) mostró que después de la práctica solo en adolescentes se produce una reducción de activación en áreas parietales y un incremento en el putamen, asociado con la planificación de respuesta. Este incremento respaldaría la idea de que los adolescentes necesitan un mayor esfuerzo para realizar cálculos complejos, apoyándose en áreas que no son necesarias en el desempeño de adultos. Esto sugiere que su respuesta cerebral es más plástica y se produce un mayor cambio con la práctica.

El objetivo principal de la investigación de la que presentamos los primeros pasos es conocer las bases neurales subyacentes ligadas a las diferencias individuales entre los participantes durante la resolución de problemas verbales, más concretamente en el error de inversión.

Viernes 9 de marzo		
Hora	Título	Autores
19:50-19:55	Una revisión del origen de la investigación en el error de inversión	De Cervelló, M.; Moreno, M.A.; Navarro, B.; Segura, C.; Arnau, D.

Palabras clave: error inversión, comparación multiplicativa, comparación aditiva, traducción sintáctica

Nuestro propósito es identificar cuáles son las tendencias cognitivas de los estudiantes que están en el origen del estudio del error de inversión. Clement, Lochhead y Monk (1981) observaron que en tareas con estructura de comparación multiplicativa, del tipo “hay N veces más X que Y” un alto porcentaje de los estudiantes, incluso cursando estudios de ingeniería, dan respuestas de la forma $N \cdot X = Y$ (error de inversión). En su investigación interpretaron que el error de inversión puede ser causado por una lectura secuencial del enunciado, producida por una conversión literal de la aparición de las palabras a símbolos del álgebra. Sin embargo, MacGregor y Stacey (1993) pusieron en duda que la traducción sintáctica fuera determinante como origen del fenómeno en la mayoría de estudiantes. La divergencia en las conclusiones de este estudio podría encontrarse en el diseño del cuestionario que se utilizó para la recogida de datos. En esta comunicación presentamos un cuestionario obtenido a partir del de MacGregor y Stacey (1993) en el que hemos intentado controlar las variables de tarea adaptando, además, las estructuras de comparación aditivas y multiplicativa en español. Además, presentamos los resultados de una intervención en la que hemos comparado los resultados de administrar el cuestionario original MacGregor y Stacey (1993) y nuestra versión



modificada. Nuestro objetivo era determinar si la divergencia en las conclusiones de estas autoras podían atribuirse o no a la especificidad del diseño del cuestionario.

Viernes 9 de marzo		
Hora	Título	Autores
19:55-20:00	Estudio sobre el fenómeno natural number bias: diseño del instrumento	González-Forte, J.M.; Fernández, C.

Palabras clave: Natural Number Bias, racionales, instrumento, Educación Primaria y Secundaria.

Durante décadas, las investigaciones han mostrado las dificultades que tienen los estudiantes de primaria y secundaria con los números racionales. Una de las posibles causas es el uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando están aprendiendo los números racionales. Este fenómeno se está denominando *Natural Number Bias*. En los últimos años, las investigaciones se han centrado en indagar sobre este fenómeno desde nuevas perspectivas mostrando que el conocimiento sobre los números naturales facilita la resolución de tareas sobre racionales que son compatibles con este conocimiento, pero provoca el efecto contrario cuando las tareas no son compatibles con dicho conocimiento. Sin embargo, los estudios previos se han centrado en examinar el nivel de éxito estudiando los tiempos de reacción sin hacer un análisis cualitativo de los razonamientos de los estudiantes que puedan confirmar las hipótesis obtenidas. En esta presentación se muestra el diseño del instrumento de recogida de datos.

Viernes 9 de marzo		
Hora	Título	Autores
20:00-20:05	La dificultad de los problemas de cambio: un análisis exploratorio sobre la influencia sintáctica	Garrido, J.M.; Pérez-Buj, G.; Romero-López, P.; Yáñez, D. F.; González-Calero, J. A.

Palabras clave: problemas verbales de una etapa, problemas de cambio, variable sintáctica, variable semántica.

Los problemas aditivos de una etapa han sido estudiados dando lugar a distintas clasificaciones, p. ej. Riley, Greeno y Heller (1983), Vergnaud (1982) y otras. Habitualmente se usa una clasificación que combina la diseñada por Riley et al. (1983) y Carpenter y Moser (1982), tal y como señalan Puig y Cerdán (1988), que reduce los problemas a cuatro categorías semánticas: combinación, cambio, comparación e igualación. En este trabajo nos centraremos en los problemas de cambio. En estos problemas se puede identificar una cantidad inicial (C_i), un aumento o disminución (+ e, - e) y una cantidad final ($C_f = C_i + (-) e$). De estas tres cantidades, dos han de ser datos y una tercera incógnita. Como tenemos dos sentidos el número total de tipos básicos de problemas será 6. En Riley et al. (1983) se utilizó un cuestionario formado por un representante de cada tipo de problema cambio estableciendo un buen control de las variables sintácticas de la tarea. A partir de los resultados obtenidos al administrar el



cuestionario a estudiantes de primaria, se pudieron ordenar los problemas por nivel de dificultad. En el presente trabajo se pretende analizar si la modificación del orden en la presentación de la información en el enunciado del problema (una variable sintáctica) repercute en la dificultad del mismo. En definitiva, se pretende poner a prueba el modelo descriptivo propuesto en Riley et al. (1983).

Sábado 10 de marzo		
Hora	Título	Autores
10:30-10:45	Ideas sobre Límites en alumnos de Bachillerato ante una Innovación	Pérez-Montilla, A.; Cardeñoso, J.M.

Palabras clave: límites, bachillerato, análisis, investigación, didáctica, diseño

El presente trabajo se centra en la didáctica de los límites de funciones puntuales para 2º Bachillerato aunque se incluyen nociones relacionadas con las sucesiones y el propio concepto, de forma genérica. La investigación llevada a cabo en un centro de la provincia de Cádiz, sirve como escenario para explorar y evidenciar las dificultades que entraña la enseñanza-aprendizaje del cálculo infinitesimal en los cursos preuniversitarios y más concretamente del objeto matemático antes mencionado, sobre todo cuando se ven involucrados profesores noveles, además de proponer un marco para la reflexión sobre la necesidad de mejorar las secuencias de instrucción tradicionales. A su vez, pretendemos facilitar a los docentes información relacionada con los obstáculos epistemológicos y cognitivos más usuales, con el objetivo de que puedan tener una visión esquemática de los mismos y tomen decisiones.

En cuanto a los referentes teóricos empleados, destacamos la teoría cognitiva de las imágenes conceptuales de Tall y Vinner (1981) y las experiencias de aula llevadas a cabo por Blázquez y Ortega en 1998 y 2000, así como Juter en 2006.

Con respecto a la metodología, destacamos el uso de cuestionarios, diarios del investigador y entrevistas, los cuales nos ayudarán a reconocer las situaciones descritas en el marco conceptual así como evidenciar los obstáculos ya estudiados en otros trabajos sobre el tema.

Por último, se ha diseñado un taller y varios recursos educativos innovadores basándonos en distintos análisis de carácter didáctico. Bajo el marco de la denominada “*investigación basada en el diseño*”, que según (Brown, 1992; Kelly, Lesh y Baek, 2008) se define como “*una familia de aproximaciones metodológicas en el estudio del aprendizaje en contexto*” (citado en Godino et al., 2013) incluimos una muestra de respuestas con carácter exploratorio de los problemas más comunes asociados a los límites de funciones después de la implementación del taller, todo ello acompañado de una reflexión sobre las causas que los originan y la posible influencia o no de la instrucción, con el objetivo de plantear una reformulación del diseño didáctico a posteriori que permita afrontar dichas dificultades.



Sábado 10 de marzo

Hora	Título	Autores
10:45-11:00	Análisis de un modelo de enseñanza para trabajar familias de funciones mediante el uso de tabletas	Ortega, M.; Puig, L.

Palabras clave: modelización, resolución de problemas, fenómenos físicos, tabletas, datos reales

Numerosos trabajos dan cuenta de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones, en especial cuando se trata de relacionar matemáticas con situaciones del mundo real, entendiendo por mundo real aquello que no incluye las matemáticas. Las situaciones de modelización, el uso de herramientas tecnológicas y de datos reales se revelan como elementos que pueden contribuir de forma positiva en el proceso de aprendizaje de dichos conceptos. Por ello, en este estudio presentamos un modelo de enseñanza para trabajar las familias de funciones lineal, cuadrática y exponencial en bachillerato a partir de la modelización matemática de fenómenos físicos y en el que se contempla el uso de apps para iPad para la toma y el procesamiento de datos reales. Además, en el propio material de enseñanza se incluye de forma explícita la realización de un análisis cualitativo de los fenómenos, las familias de funciones y el significado de los parámetros, previo a la realización de los correspondientes experimentos, como elemento de gestión y control del proceso de modelización, puesto que concebimos este como un caso particular de proceso de resolución de problemas. El trabajo se plantea dentro del marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales que pretende dar cuenta de los fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza y aprendizaje y que sirve tanto para organizar una investigación como los resultados de esta. Inicialmente se realiza un estudio del grupo que se articula en 4 lecciones que se llevan a cabo en un total de 12 sesiones de 55 minutos y durante el cual los estudiantes trabajan por parejas. Posteriormente se seleccionan cuatro alumnos para la realización de un estudio de casos que consiste en una entrevista con enseñanza. Analizamos los datos con la intención de describir las tendencias cognitivas de los estudiantes en relación con el efecto de algunos de estos elementos en sus actuaciones, en concreto de las características concretas de la herramienta tecnológica utilizada así como de la incorporación del análisis cualitativo previo en la enseñanza y presentamos unos resultados preliminares.

Sábado 10 de marzo

Hora	Título	Autores
11:00-11:15	Estructuras identificadas por estudiantes de segundo de primaria en un contexto funcional del álgebra escolar	Torres, M.D.; Cañadas, M.C.; Moreno, A.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, pensamiento funcional, estructura, generalización

Este trabajo es parte de una investigación más amplia centrada en el pensamiento funcional de estudiantes de Educación Primaria en España. Nuestra intención con este



trabajo es profundizar en el pensamiento funcional de estudiantes de 2º Educación Primaria (7-8 años). Lo abordamos a través de las nociones de estructura y generalización, centrándonos en las estructuras que identifican los estudiantes, tanto en el trabajo con casos particulares como en la generalización.

Trabajamos con un grupo de 24 estudiantes de 2º curso de un centro concertado de nivel socioeconómico medio-bajo de Granada (España). El centro y el grupo fueron elegidos de forma intencional, según disponibilidad del centro. Presentamos a los estudiantes una tarea contextualizada que involucraba la función $f(x)=x+3$ y diseñamos un cuestionario individual escrito donde se les preguntaban diferentes cuestiones sobre esa tarea a los 24 estudiantes. El análisis de las respuestas escritas al cuestionario nos permitió seleccionar a seis estudiantes a los que posteriormente realizamos entrevistas semiestructuradas individuales, con la intención de profundizar y avanzar sobre la tarea que habían trabajado en el cuestionario. Diseñamos un protocolo para las entrevistas y las grabamos con videocámara. En este trabajo nos centramos en la información recopilada a través de estas entrevistas.

Entre los resultados, destacamos que los seis estudiantes identificaron alguna estructura para los casos particulares y/o para el caso general. Evidenciamos cuatro tipos diferentes de estructuras al tratar con los casos particulares: $x+x$, $x+1$, $x+2$ y $x+3$. Las estructuras evidenciadas por los estudiantes que generalizaron se correspondieron en cinco de los casos con la relación funcional correcta de la tarea propuesta. También evidenciamos que cinco estudiantes identificaron la misma estructura ($x+3$) tanto en el trabajo con casos particulares como en el general.

Sábado 10 de marzo		
Hora	Título	Autores
12:00-12:15	Identificación de rasgos de aprendizaje de pre-álgebra en estudiantes de primaria con altas capacidades matemáticas	Arbona, E.

Palabras clave: pre-álgebra, patrones geométricos, educación primaria, altas capacidades matemáticas

Esta investigación pretende explorar formas de iniciación al álgebra de estudiantes de Primaria mediante secuencias de enseñanza basadas en problemas de patrones geométricos. Hemos diseñado secuencias de problemas adecuadas para 4º, 5º y 6º de Primaria, hemos realizado experimentaciones piloto y ahora estamos preparando la implementación de una nueva versión de la secuencia. Autores como Radford (2010), García-Reche, Callejo y Fernández (2015) y Rivera (2013) sirven de referencia para esta investigación.

Los problemas de patrones geométricos empleados en esta investigación siempre han presentado 3 cuestiones de relación directa (inmediata, próxima y lejana), en las que se pide calcular la cantidad de objetos que constituyen la representación gráfica de un término concreto de la secuencia; una de generalización (verbal y/o algebraica) y una de relación inversa, donde se pide calcular la posición en la secuencia del término representado por una cantidad dada de objetos. Además, para el diseño y la graduación



de dificultad de las secuencias hemos analizado los grados de complejidad que pueden presentar los problemas de patrones geométricos según el tipo de función, su presentación visual y su estructura gráfica.

Estamos empleando una metodología cualitativa de investigación de diseño, que organiza la implementación de nuevas secuencias a partir del rediseño de secuencias experimentadas previamente: el rediseño de la secuencia empleada durante una investigación anterior ha dado lugar a la secuencia de enseñanza utilizada para el estudio piloto. El estudio piloto se ha implementado durante 3 sesiones de 45 minutos con 122 estudiantes de 4º, 5º y 6º de Primaria, resolviendo una media de 3 problemas de patrones geométricos por sesión. También se ha implementado una sesión con 7 estudiantes detectados como superdotados.

El análisis y la comparación de los procesos de razonamiento y resolución de los problemas empleados por los estudiantes ordinarios y los superdotados nos permitirá identificar rasgos del talento matemático característicos del contexto de la pre-álgebra y los problemas de patrones geométricos.

Sábado 10 de marzo		
Hora	Título	Autores
12:15-12:30	Estudio sobre la relación complejidad-dificultad en tareas de seriación en estudiantes de educación infantil	Yáñez, D. F.; Diago, P. D.; Arnau, D.

Palabras clave: pre-álgebra, educación infantil, series, patrones

Una de las finalidades de la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades escolares es el desarrollo del pensamiento lógico-formal y pre-algebraico del estudiante. Así, es habitual encontrar tareas de seriación en las que el alumno debe colocar los elementos de un conjunto de referencia de forma que estos se sucedan unos a otros atendiendo a uno o varios criterios. Nuestro objetivo es determinar y caracterizar las relaciones entre las medidas de complejidad estructural y la dificultad experimentada por los resolutores en las tareas de seriación mediante el análisis de distintas variables asociadas a la tarea. En especial nos interesan los procesos de resolución y su evolución en la transición entre las etapas de infantil y primaria, en relación con el reconocimiento de patrones y su papel en la adquisición de estructuras del pensamiento algebraico temprano (National Council of Theachers of Mathematics, 2000). Con este fin, hemos diseñado un cuestionario con varias tareas de seriación en las que se hacen variar cuatro parámetros: núcleo de la serie, número de descriptores implicados, naturaleza del descriptor y el uso o no de distractores en la seriación. Este cuestionario se administró a 31 estudiantes del último curso de Educación Infantil que formaban parte de dos grupos naturales. Previamente al experimento se realizó una intervención en la que se presentaron los diferentes elementos que se utilizaron para construir las tareas de seriación del cuestionario y se insistió en aspectos conocidos como los diferentes atributos que estos presentaban (color, forma, tamaño, etc) con diferentes juegos lógicos (máquina de cambio, tablas de doble entrada, etc). En esta comunicación se presentarán los resultados preliminares de este estudio en el que pretende determinar qué medidas de la complejidad permiten predecir la dificultad de la tarea. Además, esto permitirá



dotar a los maestros de Educación Infantil y Primaria de herramientas para el diseño de secuencias de enseñanza basadas en criterios de complejidad crecientes acordes a la dificultad de la resolución experimentada por parte del estudiante.

Sábado 10 de marzo		
Hora	Título	Autores
12:45-12:50	Comparación entre el límite infinito de una sucesión y el límite finito de una sucesión: requisitos matemáticos y fenomenología.	Arnal, M.; Claros, J.; Sánchez, M.T. Baeza Alba, M.A.

Palabras clave: fenomenología; límite infinito; límite infinito; sucesiones

En esta comunicación se presentan los primeros avances realizados sobre la comparación entre el límite infinito y el límite finito de una sucesión, desde un punto de vista matemático y fenomenológico. Este estudio forma parte de la tesis doctoral “Límite infinito de sucesiones y su fenomenología”.

En la comparación de los requisitos matemáticos se toman en consideración los siguientes conceptos: dependencia, acotación, aproximación, procesos infinitos y tipos de infinito, que pueden encontrarse en las definiciones de ambos límites, ya sea de forma explícita o implícita.

Por otra parte, a partir de la fenomenología de Freudenthal (1983), se comparan los fenómenos organizados por la definición del límite finito de una sucesión (Claros, 2010) y por la de límite infinito de una sucesión, desde un enfoque intuitivo y formal, de forma equivalente a como ya realizaron Claros, Sánchez y Coriat (2013) entre una sucesión convergente y una sucesión de Cauchy.

Sábado 10 de marzo		
Hora	Título	Autores
12:50-12:55	Estudio longitudinal de las resoluciones de problemas de estimación en alumnos de entre 10 y 16 años	Navarro, B.; Ferrando, I.

Palabras clave:

En esta charla presentaremos el diseño de una investigación dirigida a analizar la evolución de los modelos desarrollados por estudiantes de entre 10 y 16 años al resolver una secuencia de problemas de estimación. En trabajos previos (Gallart et al., 2017 y Ferrando et al., 2017) se ha diseñado e implementado una herramienta de análisis para identificar las producciones de los estudiantes al enfrentarse a una tipología concreta de problemas de estimación. Así, el objetivo inicial es obtener una caracterización de las estrategias asociadas a dos tipos concretos de problemas de Fermi que implican obtener una estimación del número de elementos en un espacio unidimensional o tridimensional acotado -el caso bidimensional ya ha sido estudiado en Ferrando et al. (2017)-. Tal y como se explica en English (2006), intentaremos, mediante un estudio longitudinal en 3



años, estudiar la evolución de los estudiantes respecto al uso de las diferentes estrategias identificadas.

Sábado 10 de marzo		
Hora	Título	Autores
12:55-13:00	Uso flexible de estrategias en la resolución de problemas de estimación	Segura, C.; Ferrando, I.; Star, J.R.

Palabras clave: flexibilidad, problemas de Fermi, Formación inicial de maestros, tipos de instrucción

El propósito de esta comunicación es presentar un proyecto de investigación que pretende estudiar la influencia del tipo de instrucción en el desarrollo de la flexibilidad en la formación inicial de maestros. El objeto de estudio en que vamos a centrar nuestro trabajo son los problemas de estimación que, tal y como se detalla en Ferrando et al. (2017), promueven el uso de diferentes estrategias de resolución. La resolución de problemas mediante un uso flexible de estrategias puede permitir desarrollar la habilidad matemática y la comprensión de los conceptos y los procedimientos matemáticos asociados (Heinze et al., 2009). Siguiendo las ideas del trabajo de Schukajlow et al. (2015), pretendemos estudiar la relación entre el tipo de instrucción, la flexibilidad y la comprensión de las estrategias que aparecen en la resolución de un tipo concreto de problema de modelización cuya resolución implica el uso de conceptos de aritmética y de medida.

Sábado 10 de marzo		
Hora	Título	Autores
13:10-13:15	La actuación docente en base al conocimiento previo de los escolares sobre las operaciones de la suma y de la resta	Villanueva, M.M.; Fernández, C.M.

Palabras clave: Suma, resta, pensamiento sistémico-actuación del maestro.

Partimos del diseño y aplicación de unas entrevistas clínicas semiestructuradas a escolares de 3 a 6 años, sobre la suma y la resta. Y desde su análisis se pretende estudiar y modelizar la actuación del maestro en un aula ideal o hipotética. Por el criterio aula ideal, entendemos, que la clase está constituida por alumnado que presenta el mismo perfil de conocimientos que los entrevistados. O sea, que resuelven las operaciones de sumas y restas con las mismas estrategias, o bien, no la resuelven y cometen los mismos errores. En función de las respuestas el maestro debe actuar, y analizaremos las situaciones interactivas generadas. Centrándonos en el pensamiento sistémico del profesor, se crea un modelo de enseñanza constituido por una serie de actividades de menor a mayor dificultad. Basándonos en la hipótesis de que un modelo así construido resulta eficaz para que se produzca una evolución significativa en ambas operaciones



Sábado 10 de marzo

Hora	Título	Autores
13:15-13:20	Ansiedad ante la enseñanza de la matemática, autoeficacia en la enseñanza de la matemática y la relación existe entre ambas	Delgado, I.; Castro, E.; Pérez-Tyteca, P.

Palabras clave: ansiedad matemática; estudio comparativo; país; género; titulación; estudiantes universitarios

En el presente documento pretendemos describir nuestro propósito de investigación, el cual consiste en realizar un estudio sobre la naturaleza de la relación entre la ansiedad ante la enseñanza de la matemática y la autoeficacia en la enseñanza de la matemática. Primero analizaremos la ansiedad ante la enseñanza de la matemática, luego la autoeficacia en la enseñanza de la matemática, y por último, estudiaremos la relación entre ambas. Este será un estudio cuantitativo y descriptivo. Emplearemos una metodología de encuesta, ampliamente utilizada en la literatura sobre ansiedad ante la enseñanza de la matemática. La muestra está compuesta por profesores costarricenses de primaria y estudiantes de Educación Primaria en modalidad presencial y en modalidad a distancia. Se utilizarán dos instrumentos uno en cada constructo, pero antes de decidir cual escala utilizaremos, haremos una recopilación profunda de su contenido de modo que la que elijamos maneje una definición acorde a la nuestra.

Viernes 9 de septiembre

Hora	Título	Autores
13:30-	Balance e informe del grupo PNA	Codina, A.

Se realizó un balance del seminario. Los asistentes confirmaron el sistema que llevamos utilizando desde hace dos años y sostuvieron la pertinencia y utilidad de las conferencias.

Emplazamos al grupo a asistir a la próxima SEIEM en Asturias.