

# UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE ÁREA EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO<sup>1</sup>

## An approach to specialised knowledge about area measurement in student teachers

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E.

Universidad Autónoma de Barcelona

### Resumen

*Este estudio pretende caracterizar elementos del conocimiento especializado de un grupo de estudiantes para maestro cuando resuelven tareas que involucran el área de figuras planas. Se pone énfasis en dos subdominios del conocimiento especializado, el conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM). Se analizan las justificaciones escritas y los procedimientos utilizados, por los estudiantes para maestro, en la resolución de una tarea de área. Los resultados indican que la introducción de procedimientos diversos, para resolución de una tarea permite movilizar categorías de conocimiento especializado, y con ello, establecer conexiones con otros contenidos matemáticos.*

**Palabras clave:** *área de figuras planas, conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura de las matemáticas*

### Abstract

*This study aims to characterise elements of the specialised knowledge of a group of student teachers when solving tasks involving the area of flat figures. The focus is placed on two subdomains of specialised knowledge, knowledge of topics (KoT) and knowledge of the structure of mathematics (KSM). The written justifications and procedures used by student teachers in solving an area task are analysed. The results indicate that the introduction of different procedures for solving a task allows the mobilisation of specialised categories of knowledge, and with it, the establishment of connections with other mathematical contents.*

**Keywords:** *area of flat figures, knowledge of the topics, knowledge of the structure of mathematics*

### INTRODUCCIÓN

El campo de investigación relativo al conocimiento del profesor, ha venido siendo tema de estudio desde que Shulman (1986) focalizara el interés por lo que deben conocer los profesores para el ejercicio eficaz de su profesión desde dos perspectivas. Por un lado, comprender cuáles son las fuentes de las analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones y reformulaciones que los profesores utilizan en el aula. Por otro, comprender cómo los profesores toman una parte su conocimiento y lo transforman, a fin de hacerlo comprensible a sus estudiantes. Tomando como referencia las aportaciones de Shulman, numerosos estudios han puesto el foco en el conocimiento de profesores en ejercicio y en formación (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Montes, Contreras, Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Vasco, Rojas, Flores, Aguilar-González, Ribeiro y Muñoz-Catalán, 2018; Godino, Giacomone, Batanero, Font, 2017; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005), con la finalidad de distinguir los componentes específicos del conocimiento de los profesores de matemáticas.

---

<sup>1</sup> Estudio financiado por ANID PFCHA/DOCTORADO BECAS CHILE/2018-72190032, PID2019-104964GB-I00 (MINECO-España) y GIPEAM, SGR-2017-101, AGAUR. Estudio realizado en el Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021). Una aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 213 – 220). Valencia: SEIEM.

En este estudio se asume el carácter especializado del conocimiento de los profesores de matemáticas, en el sentido de Carrillo *et al.* (2018). Este marco permite una primera aproximación a la caracterización de aspectos de conocimiento sobre conceptos matemáticos específicos. En este contexto, la presente comunicación tiene por objetivo caracterizar elementos del conocimiento de los temas y del conocimiento de la estructura de las matemáticas, sobre el área de figuras planas, en un grupo de estudiante para maestro- EPM.

## MARCO TEÓRICO

Las particularidades del conocimiento de los profesores se relacionan con la especificidad de la tarea de enseñar, entendiendo que, en dicha tarea, se busca que los alumnos comprendan lo que hacen, por qué lo hacen y para qué lo hacen. Sin embargo, para que esto pueda ocurrir, es necesario que los profesores dispongan de un conocimiento amplio del contenido y su didáctica (pedagogía). En este sentido, asumimos el modelo analítico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas – MTSK (p.e. Carrillo *et al.*, 2018) – como un referente de los componentes deseables en el conocimiento especializado de un maestro, y como consecuencia, como una primera aproximación a lo que un EPM debería conocer para su futura práctica (Policastro, Mellone, Ribeiro y Fiorentini, 2019). Específicamente, nos interesan dos subdominios de conocimiento – Conocimiento de los Temas (KoT) y Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM). El KoT incluye el conocimiento de profesores sobre definiciones (p.e. ¿qué es el área matemáticamente hablando?); propiedades y sus principios (p.e., el rol de cada elemento involucrado en la resolución de una tarea de área); la fenomenología o contextos de uso (p.e., la comparación y reproducción de formas o el reparto equitativo); procedimientos (p.e., saber cómo, cuándo y por qué utilizar un procedimiento); sistemas de representación (p.e., las representaciones geométrica, numérica y algebraica que intervienen en la resolución de tareas de área). El KSM se refiere al conocimiento de profesores sobre conexiones, considerando cuatro categorías: conexiones de simplificación y conexiones de complejidad, conexiones auxiliares y conexiones transversales. Por ejemplo, conocer que el área de un octógono puede calcularse por medio de una descomposición de la superficie en figuras conocidas, como triángulos y trapecios (simplificación, porque la descomposición de figuras puede ser un precursor de las fórmulas); conocer que el área de un triángulo rectángulo escaleno puede calcularse mediante la fórmula de Herón (complejización, porque implica un conocimiento matemático más avanzado, considerando también el perímetro); conocer que el procedimiento de iteración de unidades de medida, alineadas en filas y columnas, puede evocar el procedimiento de medición que implica multiplicar número de filas por número de columnas (auxiliar, porque se utiliza un procedimiento para introducir otro diferente); o conocer que un modelo de área puede servir como base para trabajar fracciones y operaciones algebraicas (transversal, el concepto de área puede relacionar distintos contenidos matemáticos). En esta comunicación, mostramos ejemplos de conocimiento de las conexiones auxiliares.

Aunque el subdominio del Conocimiento de la Práctica matemática (KPM) no es objeto de estudio en esta comunicación, consideramos importante recalcar su relación con el KoT. El conocimiento sobre definir, hacer conjeturas, demostrar o resolver problemas forman parte del KPM. Así, este subdominio adquiere una función organizadora de los conocimientos matemáticos que componen el KoT y de las formas de operarlos. Por ejemplo, los distintos registros de representación que admite el cálculo del área (geométrico, simbólico, algebraico u otro), pueden ser utilizados para validar o demostrar que un resultado es correcto. A su vez, el conocimiento y uso de registros de representación lleva asociado un conocimiento sobre distintos procedimientos, propiedades y justificaciones, impactando directamente las relaciones entre KPM-KoT.

La diversidad de situaciones en las que puede aparecer el concepto de área y las diferentes representaciones utilizadas (geométricas, numéricas y algebraicas) permiten inferir una complejidad subyacente a dicho concepto (Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2020). Por ejemplo, a la fórmula del área del rectángulo (*base x altura*) subyace la complejidad de la estructuración espacial y el

razonamiento multiplicativo, aspectos que deben ser coordinados con los procesos de medición, en conjunto con diferentes propiedades, conceptos y procedimientos (Sarama y Clements, 2009). Esta complejidad lleva asociada ciertas dificultades. Por un lado, la escasa variedad de procedimientos para la resolución de tareas, y por otro, la tendencia hacia el uso fórmulas y cálculos por parte de los estudiantes de primaria y secundaria. Esto, también se ha observado en maestros en formación (Baturó y Nason, 1996; Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2019a; Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2019b; Chamberlin y Candelaria, 2018). Al respecto, Baturó y Nason (1996) señalan que la falta de conocimiento en los EPM resulta en una capacidad limitada para ayudar a sus alumnos a desarrollar una comprensión integrada, y significativa, de los conceptos y procesos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas.

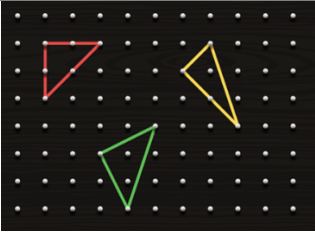
## MÉTODO

El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo con un enfoque cualitativo (Bassey, 1990) y forma parte de una investigación más amplia que busca caracterizar el conocimiento sobre el concepto de área en un grupo de EPM, mediante el modelo MTSK. Se realiza un análisis de contenido (Krippendorff, 2004), siendo las categorías de análisis los propios subdominios del modelo MTSK, es decir, el KoT y el KSM. Cada una de estas categorías tiene subcategorías específicas que nos interesan y que vienen dadas por el modelo. Por ejemplo, en el caso de KoT se encuentra la fenomenología, representaciones, procedimientos, propiedades y principios, y conexiones intraconceptuales; y en el caso del KSM, las conexiones auxiliares. En cada subcategoría hay indicadores (o códigos) y, para facilitar el proceso de asignación de códigos a las respuestas de EPM se utiliza el programa informático MAXQDA. La recogida de datos se realizó en el primer trimestre del curso escolar 2020-2021. Los participantes fueron 70 EPM que cursaban el tercer curso del Grado de Educación Primaria en la Universidad Autónoma de Barcelona. Los estudiantes, como parte de su programa de estudios, habían tenido instrucción previa sobre diferentes procedimientos para medir áreas.

### Instrumento y procedimiento

Se diseñó un cuestionario semiestructurado de respuesta abierta (Bailey, 2007) para ser resuelto de forma individual y por escrito. Se pidió a los EPM justificar por escrito cada procedimiento. Para resolver las tareas los EPM podían utilizar material manipulativo (recortables como anexo al cuestionario), además de instrumentos de medida (regla, escuadra, transportador). El cuestionario constó de 8 tareas y se estructuró de la siguiente manera: tres tareas que responden a contextos de reparto equitativo y comparación y reproducción de formas (Tareas 1, 2 y 3); 2 tareas de medición (Tareas 5 y 7); una tarea de clasificación de enunciados y otra de definición del concepto de área (tareas 6 y 7); y, una tarea de análisis de respuestas de alumnos (Tarea 8). El cuestionario fue aplicado por la profesora a cargo de la asignatura, en formato online debido a la contingencia sanitaria COVID-19 (Breda, Farsani, y Miarka, 2020), y los EPM tuvieron una semana para responderlo. Debido al objetivo de la comunicación, se presentan evidencias de las resoluciones a la Tarea 4 del cuestionario (Tabla 1).

**Tabla 1.** Tarea propuesta al grupo de estudiantes

Enunciado de cada Tarea	Gráfica de las Tareas
<p><b>TAREA 4:</b> Observa los triángulos construidos en el geoplano. <b>¿Cuál es el área de cada triángulo? ¿Cuál tiene mayor área? Justifica tus respuestas utilizando dos o tres procedimientos diferentes.</b></p>	

(Elaborada por los investigadores)

## Análisis

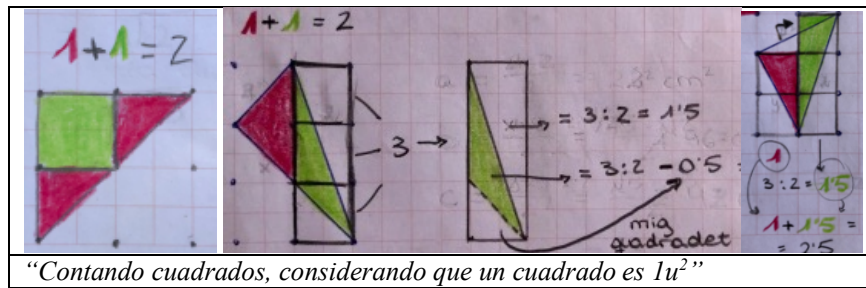
Los indicadores que constituyen la categoría del KoT se identifican a priori (Weber, 1990), y surgen de una configuración epistémica (Godino, Batanero y Font, 2019) basada en Caviedes, De Gamboa y Badillo (2020). Esto permite realizar una codificación inductiva, donde cada código se adapta a los indicadores que el modelo MTSK propone para KoT (fenomenología, representaciones, procedimientos, propiedades y principios, conexiones intra conceptuales). Por su parte, los indicadores correspondientes al KSM (conexiones auxiliares) emergen del propio análisis a las respuestas de los EPM. Para sintetizar los aspectos que nos interesan en esta comunicación, en la Tabla 2 se muestran las categorías de conocimiento y sus respectivos indicadores (códigos), en concordancia con la conceptualización del modelo MTSK. Las figuras 1, 2 y 3 muestran ejemplos de resoluciones de una EPM, identificada como “Ana”, que moviliza categorías de conocimiento especializado de los subdominios del KoT y KSM. Dicha resolución se considera representativa del conjunto de EPM que evidencia movilización de las categorías de conocimiento especializado.

**Tabla 2.** Categorías de conocimiento especializado

Categorías del KoT y KSM	Indicadores
Representaciones (R)	(R1) Geométrica: utilizando particiones en figuras conocidas para calcular el área de otras figuras. Permite visualizar el proceso efectuado para, por ejemplo, la descomposición de diferentes superficies, el trazado de líneas y elementos auxiliares, y las posibles reconfiguraciones (R2) Simbólica: conjunto de los R+ para el cálculo directo o indirecto del área. Utilizando otras expresiones de tipo algebraico, por ejemplo, la relación entre el área de un cuadrado y su diagonal $d^2 = l^2 + l^2$ ; o bien, utilizando teorema de Pitágoras para obtener las medidas de longitud de un triángulo rectángulo $h^2 = c^2 + c^2$
Procedimientos (P)	(P1) Descomponer superficies en unidades y/o subunidades congruentes para facilitar el proceso de medir áreas. (P2) Medir áreas como proceso aditivo contando unidades y/o subunidades que recubren la superficie. (P3) Medir dimensiones lineales y utilizar fórmulas (P4) Calcular áreas de figuras conocidas para obtener áreas de figuras desconocidas mediante descomposición
Propiedades (Pp) y principios (Pr)	(Pp1) Transitividad (Pp2) Acumulación y aditividad (Pr1) Todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo (Pr2) Dos figuras equivalentes en cantidad de espacio ocupado, tienen áreas iguales
Conexiones auxiliares (Cau)	(Cau1) Teorema de Pitágoras, multiplicación para el cálculo de la cantidad de elementos dispuestos en filas y columnas

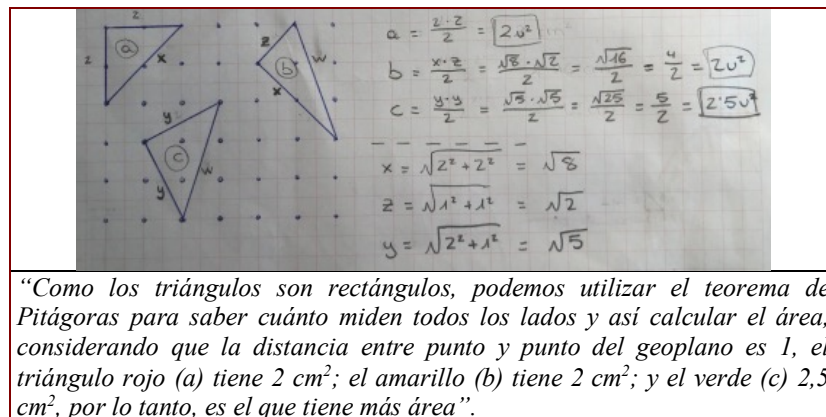
La Figura 1 muestra indicadores de conocimiento pertenecientes al KoT. Ana utiliza representaciones de tipo geométrico (R1), ya que recurre a las particiones en figuras conocidas para calcular el área de los triángulos. Así mismo, utiliza un procedimiento de naturaleza geométrica (P1) y otro de naturaleza simbólica (P2). En su respuesta, ella traza el cuadrado y/o rectángulo en el que se encuentra contenido cada triángulo, a fin de obtener el área de cada triángulo mediante un proceso aditivo. De igual manera, evidencia un uso implícito de la propiedad de acumulación y aditividad (Pp2), ya que reconoce que las figuras pueden ser descompuestas en otras figuras, conservando las mismas “partes”. Por último, es posible inferir que Ana reconoce, en el primer ejemplo de la Figura 1, que los triángulos pueden ser equidescomponibles a un paralelogramo (Pr1),

es decir, que un triángulo puede descomponerse en un número finito de polígonos y formar un paralelogramo (y viceversa), conservando el área. Ella descompone el primer triángulo de la Figura 1 y lo reorganiza mentalmente, teniendo como referencia el área de un rectángulo.



**Figura 1.** Primer procedimiento utilizado por Ana

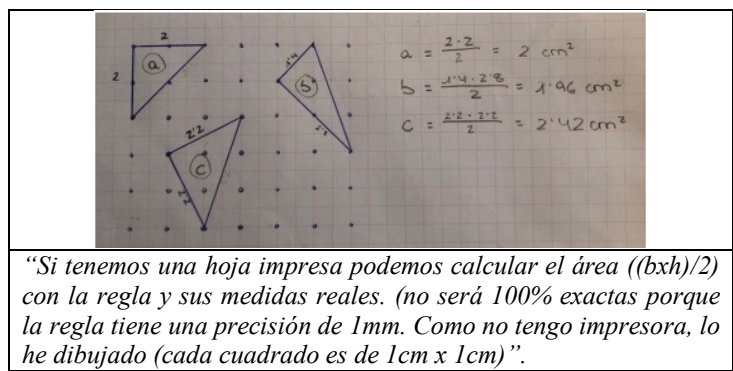
La Figura 2 muestra indicadores de conocimiento pertenecientes al KoT y KSM. Ana utiliza representaciones de tipo simbólico (R2) y establece una conexión auxiliar (Cau1), utilizando el teorema de Pitágoras para obtener las longitudes de los triángulos. Ana identifica que cada triángulo corresponde a un triángulo rectángulo, lo que le permite poner en práctica su conocimiento sobre teorema de Pitágoras.



**Figura 2.** Segundo procedimiento utilizado por Ana

En este sentido, el cálculo de áreas de triángulos rectángulos permite evocar un contenido que sirve como apoyo para la resolución de la tarea y, así mismo, de la comprensión del concepto de área. Además, se infiere el uso de la propiedad de transitividad (Pp1), ya que realiza una comparación entre los tres triángulos, determinando que el de mayor área es el triángulo rectángulo isósceles que se ubica más abajo en el geoplano. Así, también identifica que el triángulo rectángulo isósceles ubicado en la esquina superior izquierda y el triángulo rectángulo escaleno (en la esquina superior derecha) son equivalentes y, por lo tanto, tienen igual área (Pr2).

La Figura 3 muestra indicadores de conocimiento pertenecientes al KoT. Se observa que Ana utiliza representaciones de tipo simbólica (R2), ya que recurre a la fórmula del área de triángulos para obtener el área de cada uno de los tres triángulos. Del mismo modo, utiliza un procedimiento de naturaleza numérica (P3), pues mide las longitudes de cada triángulo para poder aplicar la fórmula y obtener el área de cada uno de los triángulos.



**Figura 3.** Tercer procedimiento utilizado por Ana

**RESULTADOS**

La resolución de Ana, que es representativa del grupo de EPM que movilizan los mismos indicadores de conocimiento, permite inferir que los EPM movilizan elementos de conocimiento especializado referentes al KoT, lo que se evidencia en el uso de diferentes representaciones procedimientos, y propiedades y principios. Sin embargo, el número de EPM que muestra evidencias de estos indicadores es bajo en relación al total de estudiantes. Por ejemplo, sólo 33 EPM hacen uso de representaciones geométricas en sus resoluciones, de éstos, 17 usan el procedimiento de descomponer superficies en unidades y/o subunidades congruentes para facilitar el proceso de medir áreas, y 30 el de medir áreas como proceso aditivo. Por el contrario, 63 EPM recurren a la medición directa de longitudes y al uso de cálculos. En la Tabla 3 se detalla la frecuencia de EPM que moviliza cada categoría de conocimiento. Se incluyen aquí las resoluciones erróneas, ya que, aunque los EPM no logran responder lo que se demanda en la tarea, sí logran movilizar algún indicador de conocimiento.

**Tabla 3.** Categorías de conocimiento especializado que movilizan los EPM (N=70)

		<b>Categorías de conocimiento</b>	<b>Número de EPM</b>
<b>KoT</b>	Representaciones (R)	(R1)	33
		(R2)	70
	Procedimientos (P)	(P1)	17
		(P2)	30
		(P3)	63
		(P4)	25
	Propiedades (Pp) y principios (Pr)	(Pp1)	64
		(Pp2)	27
(Pr1)		2	
(Pr2)		10	
<b>KSM</b>	Conexiones auxiliares (Cau)	(Cau1)	11

Aunque los EPM habían tenido instrucción previa sobre los procesos de medición de áreas, sólo 33 de ellos hacen uso de representaciones geométricas para dar solución a la Tarea 4, lo que indica que menos de la mitad de los EPM responde según la demanda, es decir, con uso de dos o tres procedimientos diferentes. Por el contrario, los 70 EPM muestran uso de representaciones simbólicas, quedando en evidencia la tendencia a asociar el área con su registro de representación basado en la fórmula. El uso de principios geométricos relacionados con los procedimientos, por ejemplo, que todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo, se evidencia sólo en 2 EPM. Por su parte, la propiedad de transitividad, debido a la exigencia de la tarea, comparar áreas de diferentes triángulos, se evidencia en 64 EPM.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis de procedimientos y justificaciones proporcionadas por los EPM sugiere una tendencia generalizada a asociar el área con el uso de cálculos y fórmulas, confirmando resultados de investigaciones anteriores (Baturó y Nason, 1996; Caviedes, De Gamboa y Badillo, 2019; Chamberlin y Candelaria, 2018). Esto limita la movilización de representaciones, procedimientos, y propiedades y proposiciones, categorías de conocimiento perteneciente al KoT. Del mismo modo, limita el establecimiento de conexiones con otros contenidos matemáticos (por ejemplo, el teorema de Pitágoras) y con ello, la comprensión que se tiene del concepto de área. De esta manera, las dificultades de los EPM se evidencian en su falta de conocimiento sobre varias formas de resolución para la Tarea 3.

La resolución de Ana muestra que, cuando el uso de fórmulas se complementa con el uso de representaciones y procedimientos de naturaleza geométrica, las categorías de conocimiento que pueden ser movilizadas aumentan. Así, resulta importante demandar el uso de procedimientos diversos a los EPM, a fin de que éstos puedan movilizar distintas categorías de conocimiento especializado. En este contexto, las categorías de conocimiento propuestas para el subdominio del KoT sirven como un referente de lo que los EPM deberían conocer para su futura práctica (Policastre, Mellone, Ribeiro y Fiorentini, 2019), pues permite detallar diferentes representaciones, procedimientos, propiedades y principios, en función del concepto de área. Esto podría tener implicaciones en el diseño y secuenciación estratégica de tareas para los formadores de EPM, aumentando de forma gradual las categorías de conocimiento que se quieren desarrollar.

## Referencias

- Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bassey, M. (1990). On the nature of research in education. *Research Intelligence*.
- Bailey, K. (2007). *Methods of Social Research*. Simon and Schuster.
- Baturó, A., y Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational studies in mathematics*, 31(3), 235-268.
- Breda, A., Farsani, D. y Miarka, R. (2020). Political, technical and pedagogical effects of the COVID-19 Pandemic in Mathematics Education: an overview of Brazil, Chile and Spain. *INTERMATHS*, 1(1), 3-19.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Ribeiro, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
- Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019a). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis*, 15(1).
- Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019b, septiembre). Aproximación a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria en tareas de medida y comparación de áreas. En *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 233-242). Valladolid: SEIEM.
- Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2020). Procedimientos utilizados por estudiantes de 13-14 años en tareas que involucran el área de figuras planas. *Bolema*, 34(68), 1015-1035.
- Chamberlin, M. y Candelaria, M. (2018). Learning from Teaching Teachers: A Lesson Experiment in Area and Volume with Prospective Teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, 20(1), 86-111.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: Implications for the Prescriptive Character of Didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.

Krippendorff, K. (2004) *Content Analysis: An Introduction to its Methodology*. Sage.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of mathematics teacher education*, 8(3), 255-281.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Policastro, M., Mellone, M., Ribeiro, M. y Fiorentini, D. (2019, Febrero). Conceptualising tasks for teacher education: from a research methodology to teachers' knowledge development. En *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht: ERME.

Weber, R. (1990). *Basic Content Analysis*. Sage.