

# ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA PARA LA NOCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD USANDO UN RECURSO COMPUTACIONAL

## Analysis of a sequence for the notion of probability distribution using one computational resource

Salinas, J.<sup>a</sup>, Valdez-Monroy, J. C.<sup>a</sup>, Salinas-Hernández, U.<sup>b</sup>, Sánchez, E.<sup>c</sup> y Carrillo, J.<sup>d</sup>

<sup>a</sup> CCH, UNAM., <sup>b</sup> IFÉ, ENS de Lyon., <sup>c</sup> CINVESTAV., IPN, <sup>d</sup> Universidad de Huelva

### Resumen

*En la presente comunicación se exponen los resultados de un episodio de un experimento de enseñanza más amplio cuyo objetivo fue introducir a estudiantes de bachillerato en nociones de probabilidad desde una perspectiva del concepto de distribución aprovechando el recurso de muestreo repetido utilizando el software Fathom. Se ofrecen evidencias de que los estudiantes asumen una perspectiva distribucional cuando estiman una probabilidad a partir de una distribución que ellos generaron con el software.*

**Palabras clave:** didáctica de la estadística, práctica educativa, TIC, distribución de probabilidad

### Abstract

*This manuscript shows the results of one episode of a larger teaching experiment whose objective was to introduce high school students to probability notions from a distribution concept perspective, taking advantage of the repeated sampling resource using the Fathom software. Evidence is provided that students take a distributional perspective when estimating a probability from a distribution they generated with the software.*

**Keywords:** didactics of statistics, educational practice, TIC, probability distribution

### INTRODUCCIÓN

El concepto de distribución es central en la estadística y la probabilidad toda vez que es una poderosa herramienta matemática para representar, y operar con la variación y la incertidumbre. Se pueden distinguir dos clases, a saber, las distribuciones empíricas y las teóricas. En la práctica estadística se presenta un problema recurrente que consiste en relacionar adecuadamente distribuciones empíricas (datos) y distribuciones teóricas (modelos), pues de esta manera es posible hacer predicciones y generalizaciones. “Las distribuciones teóricas son modelos que generan variación que es similar a la que puede ser observada en distribuciones empíricas” (Biehler, Frischemeier, Reading y Shaughnessy, 2018, p. 155).

En la enseñanza, el tratamiento de ambas clases de distribuciones se suele hacer de manera separada, las distribuciones empíricas se estudian en el tema de estadística descriptiva y las distribuciones teóricas (probabilísticas) en el tema de probabilidad. Además, la secuencia de conceptos que se van estudiando en probabilidad siguen una trayectoria completamente ajena a las distribuciones empíricas: Noción de probabilidad, variables aleatorias, distribuciones de probabilidad. Dicha separación no contribuye a formar una base sólida para la estadística ni tampoco para la probabilidad misma que requiere abrirse a aplicaciones más allá de los juegos de azar. La investigación sobre el concepto de distribución se ha centrado en averiguar cómo razonan los estudiantes con las distribuciones empíricas (Biehler, et al. 2018), pero no hemos encontrado el

mismo interés de la comunidad de investigadores estadísticos por explorar formas alternativas para desarrollar el razonamiento de distribuciones teóricas.

La disponibilidad de software educativo proporciona la posibilidad de imaginar otra ruta para aproximarse a distribuciones teóricas de probabilidad mediante procesos de simulación que tiene una mayor cercanía a las distribuciones empíricas, de hecho, en la literatura se les suelen llamar del mismo modo. Aunque desde la educación estadística se han propuesto diversas formas para utilizar la simulación para abordar y resolver problemas clásicos de inferencia, por ejemplo, el proceso de las tres “R” (Lee, 2011) hacen falta estudios enfocados a producir un sentido estadístico de las distribuciones teóricas de probabilidad. El concepto de distribución teórica de probabilidad se basa en las nociones de modelo de probabilidad y variable aleatoria. Con ayuda de la simulación computacional y un acercamiento frecuencial de la probabilidad es posible acercarse a nociones importantes sobre distribución evitando ciertos formalismos relacionados con el modelo de probabilidad y dejando implícita la noción de variable aleatoria.

En la presente comunicación se exponen los resultados de un episodio de un experimento de enseñanza más amplio cuyo objetivo fue introducir a estudiantes de bachillerato en nociones de probabilidad desde una perspectiva del concepto de distribución aprovechando el recurso de muestreo repetido utilizando el software Fathom.

Conviene aclarar que los datos que aquí se analizan se limitan a la parte concerniente a la aplicación de un problema inserto en una lección, que a su vez forma parte de un estudio realizado con un grupo de profesores basados en la metodología de *estudio de lecciones (Lesson Study Group)* (Salinas, Valdez-Monroy y Salinas-Hernández, 2018).

## ANTECEDENTES

Jones, Langrall y Mooney (2007) señalan que el concepto de distribución se suele introducir en el currículo de probabilidad y estadística del nivel bachillerato; en general, los programas de estudio enfatizan en la *distribución binomial*. Entre los estudios didácticos de este tema destacamos los siguientes. En los niveles básico y medio básicos se encuentran Abrahamson (2009) y Flores, García y Sánchez (2014). El primero explora un dispositivo físico de mediación semiótica para que los estudiantes (11-12 años) diseñen agrupamientos de objetos que prefiguran una distribución hipergeométrica (casi binomial). Los segundos promueven y observan los avances de los estudiantes (13-14 años) en nociones de probabilidad mediante la simulación de datos binomiales en un ordenador. En el nivel bachillerato ubicamos los trabajos de Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens y Verschaffel (2003), Bill, Watson y Gayton (2009) y García, Medina, y Sánchez (2014). Los primeros informan sobre una tendencia a aplicar propiedades de proporcionalidad en problemas binomiales donde no son pertinentes. Los segundos informan acerca de un estudio donde se examina un problema binomial mediante tres enfoques diferentes: clásico, el triángulo de Pascal y un enfoque frecuencial con el uso de Fathom; este último enfoque resultó provechoso para los estudiantes con menores habilidades matemáticas. Los terceros informan de una actividad en la que se generan datos binomiales y se evalúa la percepción de los estudiantes de variabilidad de los datos simulados. En el nivel universitario Maxara y Biehler (2006) informan de una investigación con futuros profesores de matemáticas quienes habían participado en un curso introductorio sobre estocástica. En sus resultados encuentran que el trabajo con software estadístico permitió que los estudiantes percibieran la variabilidad en situaciones binomiales, los efectos del tamaño de la muestra y aspectos de la ley de los grandes números.

Las distribuciones de probabilidad muestran importantes conexiones entre la probabilidad y la estadística a través de la noción de frecuencias relativas. Por ello, el enfoque frecuencial en la enseñanza es muy útil. Asimismo, se ha dicho que esta aproximación tiene la ventaja de que la tecnología permite aplicar de manera muy sencilla este enfoque. Usando la simulación se puede repetir un experimento un número grande de veces y se observa la convergencia (Maxara &

Biehler, 2006). “Se aborda así la dificultad de la ley de los grandes números, sustituyéndola por una aproximación empírica e intuitiva de la misma” (Gea, Parraguez y Batanero, 2017, p. 268).

La ausencia, o falta de consolidación, de los conocimientos previos relacionados con la distribución normal es una de las principales dificultades que se han detectado en la literatura. Al respecto, Batanero, Tauber y Sánchez (2004) analizaron los resultados de un experimento de enseñanza llevado a cabo con 117 estudiantes universitarios y encontraron que la complejidad de la distribución normal se debe a que su comprensión requiere la integración y la relación de diferentes conceptos e ideas estadísticas que resultan igualmente complejas: probabilidad, curva de densidad, dispersión, asimetría e histograma. En esta misma línea, Carpio, Gaita, Whilhelmi y Sáenz de Cabezón (2009) analizaron la desadaptación de los significados personales de 45 estudiantes universitarios respecto de los significados institucionales del concepto de distribución normal.

## MARCO TEÓRICO

En un experimento de enseñanza (Steffe & Thopmson, 2000), de acuerdo con la *Aproximación documental de lo didáctico* (ADD) (Trouche, Gueudet & Pepin 2018), una componente de gran importancia es el diseño de una secuencia de actividades. Ahora bien, en dicho experimento también se pretende la consecución de ciertos aprendizajes. Por otra parte, en su implementación, en relación con el análisis de las secuencias es necesario destacar la componente de la gestión de la participación de los alumnos por parte del profesor (Carrillo, Climent, Gorgorió, Prat y Rojas, 2008). De acuerdo con la ADD, consideramos esta última componente como un recurso. A continuación, se presentan algunos elementos de la ADD, que orientan el análisis de este experimento de enseñanza.

Consideramos la *Aproximación documental de lo didáctico* (ADD) (Trouche et al., 2018), cuya perspectiva es estudiar los recursos diseñados y utilizados por el profesor en su práctica docente. Esto se lleva a cabo enfocándose en el uso y diseño de los recursos y el efecto que –a través de su apropiación y transformación (trabajo documental)– tienen en la reflexión de los profesores acerca de su actividad docente.

En esta teoría se utiliza el término recurso para dar énfasis a la variedad de artefactos producidos en un medio social y cultural por la actividad humana. Los artefactos pueden ser físicos o psicológicos, como las computadoras y el lenguaje. De esta manera, los recursos se conciben no solamente provenientes de objetos materiales, sino de todos aquellos que intervienen en la comprensión y resolución de problemas, como las interacciones entre maestro y alumno (Gueudet & Trouche, 2010). La interacción que lleva a cabo el profesor con los recursos materiales y no materiales, en su práctica docente, es el motor de la génesis –surgimiento o transformación de éstos en otros; llamados “documentos”–, pues permite al profesor transformar esos recursos. El trabajo que lleva a cabo el profesor con los recursos, propicia el “surgimiento o transformación” de éstos en “documentos”; este proceso dialéctico y dinámico es conocido como “génesis documental” (Gueudet & Trouche, 2010).

En la génesis documental, los documentos son creados a partir de un proceso en el cual los profesores construyen esquemas de utilización de los recursos para situaciones dentro de una variedad de contextos, proceso que se ejemplifica por la ecuación: “documento = recursos + esquemas de utilización” (Trouche et al., 2018). Los esquemas comprenden reglas particulares de acción y se estructuran a través de los *usos* y los *invariantes operatorios*, en el transcurso de la actividad. Los *usos* corresponden a la parte observable del *esquema*, que ocurre durante la acción del profesor. Mientras que los *invariantes operatorios* corresponden a la estructura cognitiva que guía la acción del profesor, éstos son los elementos cognitivos que determinan la activación de los esquemas. Así, los esquemas sólo son observables a través de las acciones que lleva a cabo el sujeto al trabajar con los recursos.

## MÉTODO

Este estudio se centra en el uso de secuencias de enseñanza y su estudio. Lo enfocamos desde el uso de recursos (Trouche. et al., 2018), en particular observando el papel de la tecnología computacional y el del profesor en la gestión de las actividades, para identificar el tipo de razonamiento que los alumnos llevan a cabo frente a problemas de distribuciones de probabilidad.

Uno de los autores, profesor-investigador (PI), aplicó una lección previamente diseñada a un grupo de 18 de alumnos de bachillerato de entre 17 y 18 años, quienes se encontraban tomando el curso de estadística y probabilidad II. La lección se apoyó en el concepto de distribución muestral, el cual desconocían los estudiantes, como una forma de introducir el concepto de distribución normal. El principal recurso empleado por el profesor que atendió al grupo fue la lección diseñada usando el software Fathom, con el cual los alumnos estaban familiarizados, y la gestión de la participación de los alumnos a través de la intercomunicación con el grupo. La lección consistió en tres sesiones con una duración de 90 minutos cada una, las cuales fueron videograbadas. En el presente estudio sólo se analiza la secuencia realizada en la primera sesión. El estudio utiliza un enfoque interpretativo porque el objetivo es obtener información de cómo incide el recurso computacional en el razonamiento de los alumnos, teniendo en cuenta cómo se muestra en sus respuestas a los problemas y situaciones planteadas sobre la noción de distribución.

En una fase previa de esta investigación se identificaron algunos invariantes operatorios (IO) del profesor que diseñó y aplicó la lección (Salinas et al., 2018). Estos son los invariantes en los que se apoya la gestión de la participación de los alumnos en esta investigación; se relacionan con tres dimensiones: *responsabilización del aprendizaje*, *comunicación promovida* y *validación del conocimiento* (Carrillo, et al., 2008). Cada una de estas dimensiones tiene diferentes niveles y están relacionadas entre sí. La *responsabilización del aprendizaje* alude a la participación de los estudiantes que requiere una implicación cognitiva al participar en una conversación colectiva. La *comunicación promovida* está relacionada con la apertura de espacios de participación de los alumnos para propiciar sus contribuciones en la construcción de significados compartidos, y la *validación del conocimiento* es la fase que se requiere para consensuar los significados matemáticos, y permitir avanzar en el aprendizaje. (Ibid.).

Los *invariantes operatorios* (IO) corresponden a la estructura cognitiva que guían la acción del profesor; en este caso fueron los siguientes:

- IO1. ‘Los estudiantes se involucran mejor con una situación que les es familiar, tanto vivencial como conceptualmente’;
- IO2. ‘Entienden y recuerdan mejor un concepto y un procedimiento cuando surgen como una necesidad’;
- IO3. ‘La simulación (el aspecto visual y dinámico del software) facilita la comprensión de las ideas estadísticas’;

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

De acuerdo con el invariante operatorio IO1, en la primera sesión se les pidió a los alumnos resolver el siguiente problema:

María ha acudido a presentar un examen de ingreso a la Universidad. El examen es de opción múltiple y consta de 200 preguntas. Cada pregunta cuenta con tres opciones de respuesta, de las cuales sólo una es correcta. El mínimo de preguntas correctas para aprobar el examen, e ingresar a la Universidad, es 120. María contesta correctamente 75 preguntas y las restantes al azar debido a que no sabe las respuestas. ¿Qué probabilidad tiene María de ingresar a la Universidad? Justifica tu respuesta.

Al implementar la lección el profesor continúa con la génesis documental, es decir, la transformación de los recursos en otros documentos (Salinas et al., 2018), los cuales incorporan algunos *esquemas de utilización de los recursos* que guían la actividad. El esquema pertinente para este problema es el muestreo repetitivo, usando el enfoque frecuencial de la actividad. Inicialmente, los alumnos comentan en parejas la posible solución del problema. El profesor observa lo que van haciendo los alumnos y se percata de que algunos estudiantes intentan calcular la probabilidad utilizando la distribución binomial, de acuerdo con la expectativa del IO2, pues era el tema que recién habían visto en clase, y habían abordado un problema análogo con menos casos (20 preguntas en total, de las cuales 8 ya eran correctas y los 12 restantes fueron respondidas al azar). Como se había previsto en el diseño de la lección, algunos alumnos se dieron cuenta de lo poco factible que era esta vía debido al número de cálculos que involucraba. Desde este primer episodio, el profesor promueve que los estudiantes formulen preguntas y propongan respuestas en un ambiente grupal. En esta situación, respecto a la dimensión de *responsabilización*, el profesor propicia un nivel de *corresponsabilización*, para la cual “la participación requiere una implicación cognitiva por parte del alumno en el momento de “depositar” sus argumentaciones en la conversación colectiva” (Carrillo, et al., p. 69):

1. PI: ¿Alguien puede decir cómo calcular la probabilidad que se les está pidiendo?

2. E1: Yo estaba intentando con distribución binomial.

3. PI: ¿Y qué pasó?

4. E1: Apenas lo estoy haciendo.

5. PI: ¿Alguien más trató de utilizar la distribución binomial?

6. E2: Yo con Bernoulli.

[El profesor les recuerda a los alumnos que una distribución binomial es suma de variables aleatorias de Bernoulli].

7. E2: ¡Ah! Entonces sí. Pues sí como en el ejemplo anterior [el cual involucraba menos casos y se resolvió con la distribución binomial]

8. PI: ¿Qué pasó?

9. E2: [...] Como son más casos, ya son multiplicaciones más grandes.

10. PI: Se puede utilizar la distribución binomial, pero ¿cuál es el inconveniente?

11. E3: Que son muchos casos.

Debido a la experiencia que tenían los alumnos con el software, como se supuso (IO2), algunos consideraron directamente utilizarlo. De manera corresponsable, y con ayuda del profesor, todo el grupo buscó resolver el problema usando este recurso. El profesor jugó un papel central en la actividad, tanto para manipular con destreza el software, como para orientar la reflexión de los alumnos en los aspectos importantes de la simulación.

Enseguida, el profesor llevó a cabo la simulación (Figura 1) a partir de la cual, se fue construyendo una respuesta aproximada, de acuerdo con el IO3. En este proceso se avanza paralelamente en la *validación*, cuya función es realizar un proceso de negociación de los significados adecuados. Asimismo, se hace presente un proceso reflexivo que va desde la implicación cognitiva individual a la del grupo en su conjunto participando activamente en el aprendizaje.

En la Figura 1, la caja de la izquierda representa los posibles resultados de cada pregunta; la siguiente un posible resultado de responder 125 preguntas al azar; la tercera caja corresponde al número de aciertos obtenidos en cada una de 1000 muestras de tamaño 125; el histograma representa la distribución muestral de los aciertos obtenidos en las 1000 muestras; y el área sombreada en el lado derecho del histograma corresponde al número de aciertos con el que se

aprueba el examen. Así, los alumnos observaron que la distribución binomial tiende a aproximarse a una distribución en forma de campana conforme aumenta el número de repeticiones.

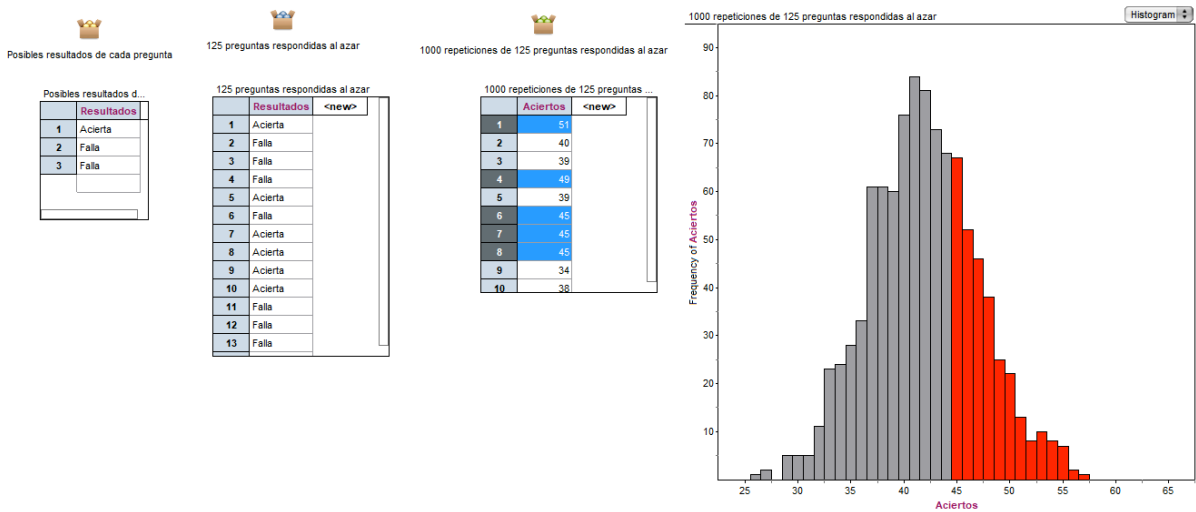


Figura 1. Simulación del problema.

A pesar de que en la simulación subyace el concepto de distribución muestral, tema que los estudiantes aún no abordaban en clase, la mayoría pudo interpretar la simulación de manera correcta y concluir que la probabilidad de aprobar el examen era menor que la de no aprobar. Esta situación muestra que la simulación ayudó a los alumnos a cambiar su razonamiento del cálculo de la probabilidad de ciertos sucesos, a una situación inversa, es decir, a la vista de los resultados observados poder inferir las probabilidades asociadas. Este hecho muestra que la simulación es un auxiliar importante para desarrollar la intuición que apoya el concepto formal de la distribución normal.

12. PI: Viendo esa simulación [...] ¿Creen que María apruebe el examen?  
[Un gran número de alumnos responde que no]
13. PI: ¿Por qué?
14. E4: Porque sólo entre el 30 y el 33% aprueban.
15. PI: ¿Cómo sabes que es entre el 30 y 33%?
16. E4: Porque seleccioné los que tuvieron 45 aciertos hacia adelante [Figura 1] y me sale que fueron 300 [aproximadamente].

Así, la simulación les permite a los alumnos concluir que la probabilidad de aprobar el examen es poca. Esta situación no es espontánea ni evidente, hay alumnos que tienen dificultad para reconocer que la proporción de casos en la que se obtienen 45 aciertos, o más, es la probabilidad aproximada de que María apruebe el examen.

17. PI: ¿Qué indica eso? ¿Qué es eso?  
[Algunos alumnos señalan que es la probabilidad, pero no es claro a qué se refieren]
18. PI: ¿La probabilidad de qué?
19. E4: De que 1,000 alumnos en la misma situación que María ingresen a la universidad.
20. PI: No.
21. E2: La probabilidad que tiene María [de aprobar el examen]  
[Asiente el profesor, pero aclara que es una probabilidad aproximada].

## CONCLUSIONES

El diseño de este experimento de enseñanza, mediante el uso de la computadora, generó un contexto de aprendizaje que permitió a los alumnos reflexionar sobre la simulación de un problema, con la distribución binomial. Centramos nuestro análisis en el episodio con el que dio inicio el experimento. Como se conjeturó en este diseño, el problema inicial fue un buen detonador para la participación corresponsable de los alumnos en la búsqueda de su solución. Así, la implicación cognitiva de los alumnos favoreció la negociación de los significados implicados en esta tarea.

Enfocar el análisis en el uso de recursos, permitió observar la importancia central de la gestión de la actividad por parte del profesor, de esta manera se amplió el análisis sobre el pensamiento del profesor-investigador en cuanto a los *invariantes operatorios*, identificados en una investigación previa (Salinas, et al., 2018), y que corresponden a la estructura cognitiva que permitió la gestión de la actividad realizada en esta investigación. En un subsecuente rediseño de este experimento de enseñanza es importante retomar esta experiencia. Es una conjetura plausible que tal rediseño dará origen a un documento (Trouche et al., 2018), el cual sucesivamente permitirá entender mejor el proceso de comprensión de los alumnos de la noción de distribución de probabilidad.

Hallamos evidencias a favor de la conjetura central del diseño, de que el ordenador puede apoyar la comprensión de conceptos estadísticos, en este caso, desarrollar la percepción de los alumnos de la simulación para tener un acercamiento a la noción de la distribución para resolver el problema planteado. De esta manera, observamos que la simulación con el ordenador ayudó a los alumnos a cambiar su razonamiento del cálculo de la probabilidad de ciertos sucesos, como en una distribución discreta, a una situación inversa, en la que, a la vista de los resultados observados en la simulación, pudieron inferir las probabilidades asociadas. De esta manera, se superó la tendencia de los alumnos a percibir un conjunto de datos como una colección de datos individuales (Hancock, Kaput y Goldsmith, 1992), se reenfocó hacia ver el conjunto de datos como un todo. Este es un paso significativo, puesto que de acuerdo con Bakker, Doorman y Drijvers (2003) los estudiantes deben ver un conjunto de datos como un agregado, como una condición para desarrollar la noción de distribución, íntimamente ligada a la idea de forma, y poder interpretar estas formas como símbolos con significado en términos de frecuencias o densidad. Los estudiantes necesitan entender esta situación antes de poder desarrollar el significado matemático de la distribución.

Este diseño está sujeto a sucesivos ajustes y adaptación de las actividades para su repetición y profundizar en el entendimiento de la manera en que el uso de recursos como la computadora pueden ayudar a la comprensión de la noción de distribución de probabilidad.

## Referencias

- Abrahamson, D. (2009). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning –the case of anticipating experimental outcomes of a cuasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction*, 27(3), 175-224.
- Bakker, A., Doorman, M., y Drijvers, P. (2003). Design research on how IT may support the development of symbols and meaning in mathematics education. *Paper presented at the Onderwijs Research Dagen (ORD)*. Netherlands: Kerkrade.
- Biehler, R., Frischemeier, D., Reading, C., y Shaughnessy, J. M. (2018). Reasoning about data. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 139-192). New York: Springer.
- Bansilal, S. (2014). Using an APOS framework to understand teachers' responses to questions on the normal distribution. *Statistics Education Research Journal*, 13(2), 42-57.
- Batanero, C., Tauber, L., y Sánchez, V. (2004). Students' reasoning about the Normal distribution. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 257-276). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Bill, A., Watson, J., y Gayton, P. (2009). Guessing answers to pass a 5-item true false test: solving a binomial problem in three different ways. *Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 1* (pp. 57-64). Tasmania: MERGA
- Carpio, M., Gaita, C., Wilhelmi, M., y Sáenz de Cabezón, A. (2009). Significados de la distribución normal en la universidad. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), Trabajo presentado en los grupos de trabajo del *XIII Simposio de la SEIEM*. Santander: SEIEM. Disponible en: [http://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/depc/Carpio\\_Gaita\\_Wilhelmi\\_Saenz\\_R.pdf](http://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/depc/Carpio_Gaita_Wilhelmi_Saenz_R.pdf).
- Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Prat, M. y Rojas, F. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. *Enseñanza de las Ciencias*, 2008, 26(1), 67-76.
- Flores, B., García, J. y Sánchez, E. (2014). Avances en la calidad de las respuestas a preguntas de probabilidad después de una actividad de aprendizaje con tecnología. *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Salamanca, España.
- García, J., Medina, M., y Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 5-23.
- Gueudet, G., y Trouche, L. (2010). Des ressources aux documens, travail du professeur et genèses documentaires. En G. Gueudet y L. Trouche (Eds.), *Ressources vives; le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, (pp. 57-74). Rennes, France: PUR et INR.
- Gea, M., Parraguez, R., y Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 267-276). Zaragoza: SEIEM.
- Hancock, C., Kaput, J. J., y Goldsmith, L. T. (1992). Authentic Enquiry with Data: Critical Barriers to Classroom Implementation. *Educational Psychologist*, 27(3), 337-364.
- Jones, G., Langrall, C., y Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.
- Lee, H. S. (2018). Probability concepts needed for teaching a repeated sampling approach to inference. En C. Batanero y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 89-101), [ICME-13 Monographs]. New York: Springer.
- Maxara, C., y Biehler, R. (2006). Students' Probabilistic Simulation and Modeling Competence after a Computer-Intensive Elementary Course in Statistics and Probability. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS 7*. Salvador de Bahía, Brasil.
- Salinas, J., Valdez-Monroy, J. C. y Salinas-Hernández, U. (2018). Un acercamiento a la metodología Lesson study para la enseñanza de la distribución normal. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar González, O. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 525-534). Gijón: SEIEM.
- Steffe, L., y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Trouche L., Gueudet G., y Pepin B. (2018) Documentational Approach to Didactics. En Lerman S. (Eds.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 113-138.