

# LA GESTIÓN DE UN REI EN SECUNDARIA: ¿CUÁNTO TIEMPO SE TARDA EN ABRIR UN CANDADO?

## Managing an SRP at Secondary school: How long would it take to open a padlock?

Vásquez, S.<sup>a</sup>, Barquero, B.<sup>a</sup> y Bosch, M.<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Universitat de Barcelona, <sup>b</sup> Universitat Ramon Llull

### Resumen

*Presentamos una propuesta didáctica basada en la implementación de un recorrido de estudio e investigación (REI) para la educación secundaria obligatoria en el área de la combinatoria. Los resultados corresponden al análisis a posteriori de una primera experimentación del REI con alumnos de 4º de la ESO en un centro educativo con larga experiencia en la innovación educativa. El análisis de esta primera experimentación nos sirve de base para la descripción de algunas condiciones institucionales que han favorecido la gestión del REI y la detección de restricciones institucionales que han afectado su evolución prevista inicialmente. Intentamos en particular identificar qué aspectos de la tradición educativa del centro podrían explicar estas condiciones y restricciones, para poder avanzar en el estudio de la ecología de los REI en la enseñanza secundaria.*

**Palabras clave:** recorridos de estudio e investigación, secundaria, combinatoria, ecología didáctica

### Abstract

*We present a didactic proposal based on the implementation of a study and research path (SRP) for compulsory secondary education in the area of combinatorics. The results correspond to the a posteriori analysis of a first experiment of the SRP with grade 10 students in a school with a long experience in educational innovation. The analysis of this first experimentation serves as a basis for the description of some institutional conditions that have favoured the management of the SRP and the detection of institutional restrictions that have affected its initially foreseen evolution. In particular, we try to identify what aspects of the educational tradition of the centre could explain these conditions and restrictions, in order to progress in the study of the ecology of SRPs in secondary education.*

**Keywords:** study and research paths, secondary, combinatorics, didactic ecology

### INTRODUCCIÓN

Presentamos aquí un estudio empírico sobre la implementación de los *recorridos de estudio e investigación* (REI) en la enseñanza secundaria española. Este estudio se inscribe en la línea de investigación desarrollada en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) sobre lo que (Chevallard, 2013) designa como el cambio de paradigma pedagógico que se está iniciando en nuestros sistemas educativos, desde el “monumentalismo” o paradigma de la visita de las obras hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo. Los REI pueden considerarse como propuestas didácticas que intentan aproximarse lo más posible al paradigma del cuestionamiento del mundo, caracterizado por considerar que el objetivo del proceso de enseñanza y aprendizaje no serían conocimientos – u “obras” – sino cuestiones abiertas a las que hay que aportar una respuesta colectiva, evaluarla y difundirla. Esta línea de investigación se está desarrollando desde hace años especialmente en el ámbito de la enseñanza universitaria, incluyendo la formación del profesorado (Florensa, 2018). Aunque existen investigaciones puntuales en Argentina, Dinamarca, Francia y Japón (Jessen et al., 2020; Parra y Otero, 2018), la implementación de REI en la enseñanza secundaria

está mucho menos estudiada. Un posible motivo sería las restricciones institucionales – especialmente curriculares – que pesan en este nivel de enseñanza. Nuestro estudio, que forma parte de una tesis doctoral en curso, consiste precisamente en analizar las condiciones para la implementación de REI en la enseñanza secundaria española y experimentar algunas propuestas, en el caso concreto de un centro educativo marcado por una larga tradición pedagógica innovadora, con un proyecto educativo basado en la investigación y el aprendizaje por proyectos, muy alejado en principio del paradigma “monumentalista” imperante (Chevallard, 2013). Nuestra estrategia consiste en dotarnos de un medio empírico que parece inicialmente facilitador del tipo de propuestas didácticas que representan los REI. De este modo, se neutralizarían algunas de las restricciones institucionales que pesan sobre este tipo de dispositivo didáctico, al tiempo que nos permitirá identificar nuevos dispositivos o estrategias pedagógicas facilitadoras.

Por motivos de calendario académico, se decidió diseñar un REI sobre combinatoria, un área que no ha sido demasiado estudiada en didáctica de las matemáticas, aunque sí existen algunos trabajos importantes en nuestro país (Millán, 2013; Navarro, Batanero y Godino, 1996; Roa, Batanero, Godino y Cañizares, 1997). Se pensó inicialmente en una cuestión generatriz sobre contraseñas y seguridad (“¿Por qué nos piden siempre que utilicemos mayúsculas, números y caracteres especiales?”), pero al final se decidió proponer una cuestión sobre un ámbito más sencillo (los candados) para ampliar en una segunda etapa al caso de las contraseñas.

En las próximas secciones, presentamos el contexto institucional en el que se ha llevado a cabo la implementación del REI, para describir posteriormente su desarrollo y análisis. Los resultados obtenidos nos servirán para responder a las siguientes cuestiones de investigación: (1) ¿Qué aspectos del REI se han implementado según el diseño previsto y cuáles no? ¿Qué consecuencias se desprenden de cara a un nuevo diseño del mismo REI? (2) ¿Cuáles han sido los principales dispositivos didácticos que han favorecido el desarrollo del REI y cómo los han gestionado los profesores y alumnos? (3) ¿Qué condiciones han favorecido la existencia y desarrollo de estos dispositivos?

## **CONTEXTO INSTITUCIONAL Y CONDICIONES PARA LA IMPLEMENTACIÓN**

La primera experimentación del REI sobre candados se llevó a cabo en un colegio concertado de Esplugues (Barcelona), el Col·legi Natzaret, entre abril y mayo de 2019, en la asignatura de matemáticas. Participaron un total de 58 alumnos de 4º de la ESO y los tres profesores de matemáticas de este curso, una de ellos investigadora en didáctica de la matemática, primera autora de este trabajo y coordinadora de la experimentación, y los otros dos profesores con poca experiencia docente. Los 58 estudiantes se organizaron en tres grupos-clase y se dividieron en equipos de trabajo de 3 a 4 personas. Los equipos se formaron de forma heterogénea según los criterios acordados por los profesores: los estudiantes se ordenaron según sus calificaciones en la última unidad y fueron clasificados en 4 niveles. Cada equipo de trabajo se formó por estudiantes de cada uno de los niveles. En la escuela, los tres grupos-clase estaban en salas separadas y los profesores iban rotando de grupo en cada sesión. Los profesores compartían un diario de seguimiento de la experimentación que actualizaban al finalizar cada sesión. De esta manera, los tres profesores iban siguiendo la evolución de todos los grupos y, al menos una vez por semana, guiaban presencialmente el trabajo de uno de ellos. Además, en prácticamente todas las sesiones, uno o dos de los grupos tuvo un observador-investigador externo que completó el diario de seguimiento de la experimentación.

La nueva metodología introducida con el REI era nueva tanto para estudiantes como para el profesorado. Aunque cabe destacar que la escuela tiene instaurados en las etapas de educación primaria y secundaria, ciertos dispositivos didácticos que favorecieron notablemente su experimentación. Los estudiantes están habituados a trabajar en equipos, a organizar los grupos clase de distintas formas, y a la rotación de docentes o la participación de varios de ellos en sesiones de clase. En el caso particular de matemáticas en 4º de la ESO, la asignatura de matemáticas se estructura

en distintas unidades. En general, cada unidad tiene un listado de problemas y ejercicios que los estudiantes van realizando. Voluntariamente, los estudiantes pueden atender a las denominadas “masterclass”, unas clases magistrales donde los docentes presentan los contenidos específicos de la unidad y resuelven dudas. Cuando los estudiantes se sienten capacitados, realizan un examen el día de su elección y tienen la oportunidad de realizar un examen de recuperación una semana después. Cuando todos los alumnos han realizado el examen, toda la clase se organiza en grupos cooperativos, para desarrollar, durante una semana, un proyecto relacionado con la unidad.

En este contexto, se decidió implementar el REI en las últimas tres semanas del curso ya que, respetando la programación realizada al inicio del curso, durante ese tiempo se debía trabajar la unidad de combinatoria. El sistema de evaluación planteado debía encajar con la organización pedagógica de la asignatura, por eso, mantuvimos el sistema de evaluación previsto en la programación, aunque se introdujeron algunas variaciones para dar cabida a los dispositivos y instrumentos específicos de seguimiento y evaluación que se usaron durante la implementación del REI. Más concretamente, para realizar el seguimiento del trabajo de los estudiantes se prepararon y se fueron recogiendo distintos materiales que fueron específicamente diseñados para este REI. Más concretamente, se solicitó a los estudiantes que fueran entregando: los dossiers de trabajo (en formato papel) que los grupos rellenaban al finalizar cada sesión; el diario de la experimentación (también en formato papel) que los grupos actualizaban al finalizar cada sesión de experimentación; un mapa de cuestiones y respuestas que se solicitó a cada grupo como análisis del proceso desarrollado; informe final grupal y video con la validación experimental; una exposición oral y su autoevaluación del trabajo cooperativo y, finalmente, un examen individual sobre el trabajo desarrollada en las sesiones de experimentación del REI. La evaluación de todas estas entregas tenía el mismo peso en la nota final, excepto el examen individual que contaba un 40%. Los profesores disponían de rúbricas de evaluación para poder valorar las entregas y, durante las sesiones de clase, podían añadir puntos positivos y negativos por buenas o malas contribuciones o comportamientos, que tenían un impacto directo en el resultado final de cada estudiante.

## ANÁLISIS A POSTERIORI DEL REI

### Devolución de la cuestión generatriz del REI

En la primera sesión del REI, los profesores introdujeron el contexto de los candados con el que se trabajaría durante toda la unidad y se explicó la forma de trabajo y calendario aproximado. Empezaron por presentar cinco tipos diferentes de candados, cada uno con sus instrucciones particulares. En el dossier de trabajo los estudiantes tenían las imágenes de dichos candados, cada uno con sus instrucciones particulares. Algunos de ellos, además, se tenían físicamente en el aula para que los estudiantes pudieran manipularlos. Los profesores presentaron la cuestión generatriz  $Q_0$  que guiaría todo el proceso sobre *¿cuánto tardaríamos en abrir cada uno de estos candados?* y que rápidamente suscitó que los estudiantes empezaran a interesarse y a dar respuestas muy espontáneas.

La primera cuestión que los profesores propusieron a los estudiantes fue decidir *¿por cuál de los candados proponemos empezar?* ( $Q_{0.1}$ ). La mayoría de los estudiantes respondieron que deberían empezar con el segundo candado. En este, se permite apretar diferentes números sin tener en cuenta el orden. La principal razón que dieron fue que creían que era el que tenía menos combinaciones posibles. Aunque la mayoría de los grupos no supieron dar una explicación bien fundamentada sobre su elección, sí introdujeron la idea de que el número de combinaciones tendría que ver con la dificultad del candado para abrirse. Esto supuso una sorpresa para los profesores, quienes esperaban que los estudiantes escogieran el candado que fuera más fácil de calcular su número de combinaciones y precisamente, el segundo candado era el que tiene asociado un cálculo más complejo, pero, aun así, menor número de combinaciones. Antes las dudas abiertas, se propuso a los estudiantes proponer una clasificación de los cinco candados y explicar el criterio que utilizaban para clasificarlos. Antes de terminar la primera sesión, se dio a los estudiantes un primer dossier a rellenar para cada candado

donde se les pedía dar su respuesta a  $Q_0$  en cada caso particular y la justificación de sus respuestas. Durante las siguientes sesiones, los estudiantes fueron elaborando respuesta a  $Q_0$  para cada candado y, al inicio, esperaban por la validación de los profesores, aunque esta nunca llegó. Las herramientas más comunes para la validación fueron las discusiones en clase: los grupos de estudiantes exponían y defendían sus respuestas hasta que se llegaba a un acuerdo con el grupo clase. El rol del profesor consistía en guiar el proceso, resaltar cuestiones que iban surgiendo, establecer un vocabulario específico y clarificar y cuestionar las contribuciones de los alumnos. Así se consiguió que fuera el estudio de  $Q_0$  y la construcción conjunta y consensuada de respuestas parciales tomaran la legitimidad necesaria. Cuando el grupo clase acordaba que el candado había quedado resuelto, cada equipo explicaba sus justificaciones en el dossier de trabajo.

### **Necesidad de establecer un *logos* sobre la actividad matemática desarrollada**

Desde las primeras sesiones apareció una limitación importante. Los profesores y las observadoras notaron que los estudiantes empezaban a utilizar expresiones diversas para comunicar sus hipótesis, respuestas y razonamientos. Se evidenció la necesidad de establecer una terminología común y específica para referirse a la actividad matemática que estaban desarrollando – un *logos* en la terminología de la TAD (Chevallard, 2013) –, y que fuera compartida por estudiantes y profesorado para poder avanzar en las puestas en común.

Por este motivo, a partir de la segunda sesión, se decidió que los profesores institucionalizaran un vocabulario específico. Así, se hablaba de *combinación*, para referirse a la contraseña que se puede introducir en un candado; de *casilla* o *celda*, para nombrar a cada elemento de una combinación concreta; y, de los *elementos de la casilla*, al grupo de valores que pueden introducirse en una casilla o celda. Aunque esta terminología no fue asimilada inmediatamente, permitió mejorar las condiciones bajo las cuales se compartían, comparaban y consensuaban las respuestas y justificaciones de los grupos de trabajo y entre grupos clase. Para facilitar su adopción, en las puestas en común, los profesores se refirieron constantemente a este vocabulario consensuado para poder avanzar y describir los resultados obtenidos. También sirvió para facilitar la institucionalización de los resultados parciales que se obtenían y las nuevas cuestiones que surgían.

### **Evolución del *medio didáctico* en la gestión del REI**

A lo largo de la experimentación del REI, hubo etapas y decisiones importantes sobre qué *media* (entendidos como medios de información) poner a disposición de los estudiantes, qué conocimientos matemáticos y extra-matemáticos presentar, cómo compartir las cuestiones y respuestas que aparecían, etc. Todo ello entra en juego en el enriquecimiento progresivo del medio didáctico necesario para la gestión del REI. Comentamos a continuación las principales etapas y decisiones que se tomaron. Como hemos comentado sobre la devolución de la cuestión generatriz, queremos destacar que el uso físico-manipulativo de los candados en el aula tuvo un impacto muy positivo en los estudiantes. Poder manipular los candados aportó a los estudiantes un medio experimental excelente, tanto en las primeras sesiones para poder caracterizar cada uno de los candados, como en las últimas con la validación experimental de sus respuestas finales (ver en la siguiente sección). En consecuencia, fue una desventaja el no tener suficientes candados para todos los grupos. Como los tres grupos-clase estaban separados, a veces algún grupo no podía disponer de alguna tipología de candados para poder manipularlos.

Un aspecto que no se integró en el estudio fue la búsqueda de respuestas previamente disponible sobre los candados, sus estrategias de apertura y de robo. Desconocemos si los estudiantes llevaron a cabo esta indagación por su cuenta, pero en todo caso no tuvo su espacio en el aula. En cierta manera, el diseño del REI se adaptó a una cierta tradición escolar en la que es el profesor el que “controla” el medio inicial de los alumnos.

Otra decisión importante fue que, una vez se dio respuesta para los cinco primeros candados, se propuso repetir la tarea con estos mismos cinco candados, pero ahora con restricciones añadidas. Por ejemplo, en el primer candado quedaba prohibido que la combinación estuviera formada por números repetidos. Esta segunda etapa se desarrolló de forma mucho más ágil, ya que dicha variación en los candados introducía pequeñas variaciones respecto a su resolución, y permitió a los estudiantes y al profesorado institucionalizar algunas técnicas de resolución y su justificación, así como el vocabulario usados, es decir, institucionalizar parte del *logos* justificativo de la práctica desarrollada.

Una vez terminadas estas dos primeras fases del REI, se planteó realizar una clase magistral a cada grupo. Cada uno de los profesores se encargó de llevar la clase magistral a cada uno de los grupos. Para empezar la sesión, se repasó la clasificación que habían hecho los estudiantes de los candados. Se recordó las explicaciones que habían dado en general para encontrar el número de combinaciones en cada uno de los casos. Esta fue la primera ocasión en la que los profesores validaban oficialmente las soluciones. Una vez hecho esto, se les propuso a los estudiantes la cuestión: *¿Cómo podemos encontrar una técnica general para encontrar el número de combinaciones de cada candado?*

Para poder resolver esta cuestión, se plantearon a los estudiantes las siguientes cuestiones derivadas que tendrían respuestas diferentes según el candado que se escogiera: ¿Dos combinaciones con los mismos elementos ordenados de maneras diferentes, cuentan como dos combinaciones o como una? ¿Pueden repetirse dos o más elementos en cada combinación? ¿Cuántas casillas tiene cada combinación? ¿Cuántos elementos están disponibles en cada una de las casillas? Estas cuestiones permitieron a los profesores, en esta clase magistral, formalizar el lenguaje para hablar de combinatoria y los métodos y fórmulas para poder calcular rápidamente el número de combinaciones. Al acabar la sesión, los profesores propusieron a los estudiantes que revisaran sus respuestas anteriores para asociar sus respuestas a la clasificación y métodos ahora formalizados. Se decidió también entregar un listado de problemas típicos de combinatoria en diferentes contextos. Se pidió a los estudiantes que, al empezar cada problema de combinatoria, relacionaran sus características y resolución con los tipos de candados estudiados. Finalmente, los estudiantes se evaluaron individualmente mediante un examen tipo test. Este examen contenía 10 preguntas con diferentes situaciones de combinatoria (sabores de helados, camisetas de colores, etc.) pero con la misma estructura: “¿De cuántas maneras diferentes podemos contar...?” Al día siguiente se les entregó el examen corregido y una semana después los estudiantes que querían podían presentarse a un segundo intento de este examen, con la misma estructura.

### **Los mapas de cuestiones y respuestas para describir el proceso seguido**

En las últimas sesiones de experimentación del REI, y una vez los estudiantes habían elaborado una respuesta final a  $Q_0$ , los profesores plantearon una nueva tarea a los estudiantes. Se les pidió elaborar un *mapa de cuestiones y respuestas* para analizar y describir el proceso de estudio que habían seguido. En esta escuela, los estudiantes están habituados a trabajar con mapas mentales para organizar los contenidos de la unidad, tarea que habitualmente se plantea en el cierre de la unidad. En esta ocasión, se les solicitó no solamente describir los conceptos que habían intervenido, si no poner especial atención a la dinámica entre las cuestiones, las respuestas, y las estrategias que habían ido usando durante en su “recorrido” particular.

Se dedicaron dos sesiones para que los grupos pudieran avanzar en la elaboración del mapa de cuestiones y respuestas, pero se tuvo que alargar un día la fecha de entrega, dada la dificultad que suponía esta nueva tarea. Los mapas que entregaron inicialmente los estudiantes no eran del todo satisfactorios, en la opinión de los profesores e investigadores. Se pidió a los estudiantes que, para la entrega final, los completaran en caso de que lo consideraran necesario.

## Validación experimental de la respuesta final y su evaluación

En la etapa final de REI, se propuso a los estudiantes trabajar en una *validación experimental* de las respuestas que habían elaborado. A cada grupo se le asignó un candado diferente. Al haber pocos candados disponibles, hubo grupos que trabajaron con el mismo caso. Cada grupo tenía que comprobar si el tiempo que había predicho se aproximaba correctamente al tiempo real que tardaban en abrirlo. Para cerrar esta última etapa, se les pidió a los grupos que elaboraran un vídeo donde cada grupo explicara cómo han descubierto todas las posibles combinaciones del candado, el tiempo que habían pronosticado que era necesario para abrir el candado, el video en *time-lapse* mostrando cuánto tardaban en realidad en abrir, y la comparación entre el tiempo pronosticado y el tiempo real. Durante este proceso aparecieron nuevas preguntas. Por ejemplo, los estudiantes encontraron que uno de los candados admitía hasta tres combinaciones diferentes que lo abrían. Ofrecieron una variedad de hipótesis sobre el funcionamiento interno del candado y buscaron información para describir por qué debía ocurrir esto. Además, los profesores plantearon una nueva cuestión derivada, *¿cuánto tiempo se tardaría en descifrar una contraseña de WiFi con un número fijo de elementos?* para hacerles pensar en cómo el estudio con los candados ayudaría a estudiar esta nueva cuestión. Aún así, esta nueva cuestión es mucho más amplia que la que ha guiado este REI sobre candados, pero se quería probar la reacción de los estudiantes para estudiar su posible potencialidad para futuras experimentaciones.

Finalmente, los estudiantes tuvieron que hacer una presentación oral delante de los tres profesores y del resto de los grupos de las tres clases. En esta presentación debían presentar su mapa de cuestiones y respuestas, el vídeo con la validación experimental de sus respuestas y una primera propuesta sobre cómo abordarían la cuestión de la contraseña de la WiFi. En estas exposiciones, todos los equipos tenían que evaluar a sus compañeros utilizando la misma rúbrica que los profesores.

## PRIMEROS RESULTADOS: REACCIONES DE ESTUDIANTES Y PROFESORES

Al finalizar la unidad, se pidió a los estudiantes que rellenaran un cuestionario de evaluación del REI, valorando del 1 al 4 su grado de acuerdo con las afirmaciones. Además, tenían la opción de expresar sus opiniones sobre diferentes aspectos del proceso. Los estudiantes valoraron positivamente tanto la organización, la duración como la variedad de actividades. Sobretudo agradecieron la sesión con la clase magistral y coincidieron en pensar que sin ella seguramente no hubieran sido capaces de resolver el listado de problemas ni el examen. Afirman también que el tiempo de trabajo demandado por el profesorado se ajustaba a las horas de clase y agradecen la flexibilidad y los cambios generados por sus propias necesidades. Por lo general, estarían dispuestos a cambiar la mecánica de las clases por *proyectos* útiles para la comprensión de las matemáticas. En cuanto a las valoraciones más negativas, los alumnos consideraron que el mapa de cuestiones fue una actividad demasiado forzada, incluso innecesaria. Como se les pedía rellenar diariamente el diario de trabajo, consideraron que el mapa de cuestiones era una reiteración de ese trabajo ya hecho. Aun sintiendo que la sensación general era positiva, algunos estudiantes, aunque en minoría, siguen opinando que todo aquello que se aleje de las explicaciones de clase y la práctica de ejercicios de libro es innecesario y prefieren la metodología tradicional. Además, un grupo considerable de estudiantes opina que la resolución de las preguntas relativas a los candados no ha sido útil para el examen, pero sí la clase magistral.

En cuanto a los profesores, los tres acabaron con una sensación positiva al finalizar el REI. Manifestaron que, gracias al trabajo manipulativo con los candados, la sesión de clase magistral fue mucho más fluida que si se hubiera empezado por ésta. Se sorprendieron con algunos razonamientos intuitivos de algunos alumnos (a veces los considerados peores estudiantes), que a priori no tenían nociones previas de combinatoria, cómo algunos llegaban a respuestas y razonamientos correctos, aun sin tener las fórmulas. Además, los profesores calificaron como reto el no poder validar (dar por buena o rechazar) las respuestas de los alumnos. El tener que conseguir, mediante preguntas, que

fueran los propios compañeros los que vieran flaquezas en las demostraciones, supuso momentos difíciles de gestionar por los profesores en el aula.

Por otro lado, reconocieron que fue un esfuerzo añadido el tener que documentar la actividad diaria del aula. La herramienta del diario compartido, donde los profesores tenían que apuntar lo ocurrido en el aula, a veces quedaba vacía y los profesores no encontraban momento para rellenarla hasta pasados unos días. Así pues, como la actividad del aula era muy dinámica y requería que se hicieran cambios en la planificación casi diariamente, encontrar los espacios para poder coordinar estos cambios fue prácticamente imposible y estas tareas sucedían entre pasillos y sin el tiempo de reflexión ideal. Esto hacía que, además, los profesores con menos experiencia tuvieran la impresión de descontrol o falta de seguridad. A esto se le sumaba el hecho de ir rotando de grupo entre el profesorado. Ocurría en alguna sesión, con algún grupo, que se generaban dudas por parte de los alumnos referentes a otras sesiones, con otro docente. Este tipo de situaciones, reconocen los profesores, eran difíciles de gestionar, ya que muchas veces se vivían con incomodidad profesional, al tener que poner en cuestión el buen hacer de un compañero.

### **CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN SOBRE EL REDISEÑO DEL REI**

Intentaremos dar respuesta a los objetivos iniciales de esta primera investigación. En relación con los “imprevistos” o deficiencias del diseño inicial del REI, queremos mencionar dos puntos que consideramos importantes. El primero tiene que ver con el *medio* inicial que se proporcionó a los estudiantes. Como hemos mencionado antes, no dispusimos de suficientes candados materiales para proporcionar a los alumnos, un detalle que puede parecer menor que afectó sin duda el desarrollo de las primeras sesiones. Tampoco se contempló la posibilidad inicial de buscar en la web posible información disponible sobre la cuestión que se planteaba: un gesto de investigador muy evidente pero que no surge de forma espontánea en la cultura escolar tradicional. Finalmente, el aspecto más determinante a nuestro entender fue la necesidad terminológica que se evidenció en los primeros días del REI: la falta de vocabulario común y específico para una situación nueva y compleja para los estudiantes es una complicación que en futuras experimentaciones requerirá de una respuesta más temprana. Es, además, una limitación que ya ha surgido en investigaciones previas sobre los REI pero que todavía no se ha abordado de forma sistemática (Bosch, 2018; Florensa, 2018).

En relación con los dispositivos didácticos que instrumentan el REI, distinguiremos también varios aspectos. En cuanto a los *mapas de preguntas y respuestas*, podemos concluir que no se consiguieron los resultados esperados. Los estudiantes no le encontraron utilidad ya que apareció de una manera demasiado artificial y muy tardía en el proceso de investigación. Para futuras experimentaciones será el profesor el que disponga de esta herramienta y, con las contribuciones de los alumnos, irá construyéndolo durante los momentos de debate.

La *validación experimental* fue una actividad muy provechosa para los alumnos: tuvieron la oportunidad de completar el cómputo del número de combinaciones y analizar las estrategias más eficientes. Para futuras experimentaciones se valorará el poder alternar momentos de contaje con momentos de validación experimental y quizás, introducir herramientas informáticas para realizar el contaje más rápidamente. En cuanto a la *clase magistral*, fue muy útil también para los estudiantes. Basándose en la premisa que los estudiantes ya habían encontrado el número total de combinaciones para cada candado y teniendo claro que no habían necesitado de ninguna herramienta externa, la institucionalización del contaje de casos apareció como una manera de corroborar que los resultados obtenidos eran válidos y que existen alternativas más rápidas, pero no más eficaces, para realizar este contaje. El haber hecho también práctica de la técnica con problemas estándar y una evaluación típica ofreció a los estudiantes y a los profesores la sensación de tranquilidad en cuanto a los aprendizajes y contenidos adquiridos. Aunque no se siguió la estructura tradicional de las clases, los estudiantes eran capaces de saber cómo utilizar las técnicas de la combinatoria para múltiples situaciones.

Sobre las *herramientas de observación y seguimiento*, se observa que los diarios de los alumnos fueron útiles para la distribución y organización del trabajo cooperativo. Normalmente los estudiantes que suelen llevar el mando del equipo y de dirigir los razonamientos era incapaces de rellenar el diario. Esto forzaba a que el resto del grupo se tuviera que repartir las tareas diarias y que, por lo tanto, todos los miembros tuvieran que ser conocedores del proceso del equipo. El diario de los profesores también fue útil para asegurar un consenso común. Aun así, también fueron necesarias reuniones de departamento organizadas o espontáneas para llegar a decisiones comunes. Como suele ser habitual, la falta de disposición de horas de coordinación es una gran restricción para el grupo de profesores.

Finalmente, es necesario mencionar la posibilidad de que en futuras experimentaciones del REI se pueda cambiar la cuestión generatriz por una más abierta y menos “finalizada”. Se considerará la opción de plantear: *¿Cuál de los siguientes candados es más seguro?* En el caso que se decida utilizar ésta, se introducirán restricciones añadidas, ya que no es del todo natural que esta cuestión se relacione con la condición institucional más importante que supone el tener que tratar el tema de combinatoria. Quizás, si la cuestión generatriz se cambia, los estudiantes podrán verse motivados a unas líneas de investigación más tecnológicas, lo que puede provocar que los profesores tengan que dirigir más la investigación y los estudiantes pierdan protagonismo en la investigación. En relación con la última cuestión de investigación, las condiciones favorables al REI proporcionadas por la tradición pedagógica del centro, es importante resaltar la naturalidad con la que los estudiantes trabajaban de manera cooperativa, adoptaban nuevos roles, y la facilidad con la que eran capaces de analizar y referenciarse al proceso de aprendizaje, de manera crítica y constructiva. Además, la infraestructura del centro, con disposición de herramientas digitales, facilitó a los estudiantes distintas maneras de interactuar a lo largo del proceso y evidenció su habilidad para crear materiales digitales.

### Agradecimientos

Esta investigación se ha financiado en el marco de los proyectos I+D+i: RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y RTI2018-101153-B-C21 (MCIU/AEI/FEDER, UE)

### Referencias

- Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. In B. Sirakov, P. N. de Souza y M. Viana (Eds.), *International congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 4001–4022). Rio de Janeiro: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd <https://eta.impa.br/dl/121.pdf>
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182. <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2013.26>
- Florensa, I. (2018). *Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and teacher education*. Tesis doctoral. Universitat Ramon Llull.
- Jessen, B., Otaki, K., Miyakawa, T., Hamanaka, H., Mozoguchi, T., Shinno, M. y Winsløw, C. (2020). The ecology of study and research paths in upper secondary school. En M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García y J. Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook* (pp. 118-138). Routledge.
- Millán, E. F. (2013). Razonamiento Combinatorio y el currículo español. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, 1, 539-554.
- Navarro, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación matemática*, 8(1), 26-39.
- Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (1997). Estrategias de resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, 36, 433-446.
- Parra, V. y Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 13, 1–18.