

RECURSOS MANIPULATIVOS Y GRÁFICOS EN LA COMPRENSIÓN DE TAREAS CON PATRONES: UN ANÁLISIS COMPARATIVO CON NIÑOS DE 4 A 6 AÑOS

Manipulative and graphic resources in the comprehension of patterned tasks: a longitudinal study with children aged 4-6 years

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N.

Universitat de Girona

Resumen

Se presenta un estudio para analizar cómo influyen los recursos manipulativos (RM) y los recursos gráficos (RG) en la comprensión de tareas con patrones de repetición con una muestra de 24 niños de Educación Infantil. A partir de una investigación basada en el diseño, se comparan las representaciones de patrones obtenidas durante dos cursos escolares (4 a 6 años). Los resultados arrojan una mayor presencia de errores en el contexto de RG que en el de RM representando un 54.2% frente a un 30% para 4 años; y un 69.6% frente a un 0% para 5 años respectivamente. Se concluye que el éxito de la comprensión a través de la representación está condicionado por el nivel de abstracción del contexto de enseñanza; y que, cuando los niños tienen la oportunidad de manipular, explorar, transformar y modificar un patrón de manera tangible, son más capaces de comprender, generalizar y transferir este conocimiento a otras situaciones de aprendizaje.

Palabras clave: Patrones matemáticos, contextos de enseñanza, recursos manipulativos, recursos gráficos, educación Matemática infantil.

Abstract

A study is presented to analyse the influence of manipulative resources (MR) and graphic resources (GR) on the comprehension of tasks with repetition patterns in a sample of 24 children in pre-school education. Based on a design-based investigation, the pattern representations obtained during two school years (4 to 6 years old) are compared. The results show a greater presence of errors in the context of RG than in the context of RM, representing 54.2% versus 30% for 4 years old; and 69.6% versus 0% for 5 years old respectively. It is concluded that the success of understanding through representation is conditioned by the level of abstraction of the teaching context; and that when children have the opportunity to manipulate, explore, transform and modify a pattern in a tangible way they are better able to understand, generalise and transfer this knowledge to other learning situations.

Keywords: Mathematical patterns, teaching contexts, manipulative resources, graphic resources, early childhood mathematics education.

INTRODUCCIÓN

El pensamiento algebraico se conforma de procesos mentales que contribuyen a crear significado referencial para algún tipo de representación, construyendo y expresando a su vez, generalizaciones

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2022). Recursos manipulativos y gráficos en la comprensión de tareas con patrones: un análisis comparativo con niños de 4 a 6 años. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 119-127). SEIEM.

(Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez, 2022). Desde este prisma, la exploración de patrones puede considerarse un trampolín para promover la generalización (Wijns et al., 2021) y un componente que influye positivamente en el desarrollo matemático temprano (Callejo et al., 2016; Lüken, 2018; Mulligan et al., 2020; Papic et al. 2011; Rittle-Johnson et al., 2017; Wijns et al., 2021), puesto que promueve el estudio de las regularidades, y la conexión y representación de relaciones mediante símbolos (Radford, 2008). Precisamente, Lüken y Sauzet (2020) afirman que aprender matemáticas es desarrollar la capacidad de reconocer patrones, interpretar estructuras y establecer relaciones. Por tanto, es necesario que los niños tengan experiencias previas con tareas de patrones para desarrollar su pensamiento algebraico antes de iniciar una instrucción en el uso de la notación y simbología algebraica (Carraher y Schliemann, 2018).

En este contexto, se aboga por una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades que se construya a partir del conocimiento concreto, familiar y cercano del niño, para luego avanzar hacia un conocimiento más abstracto y simbólico. A pesar de esta idea consolidada, poco se sabe sobre cómo influye el contexto de enseñanza en la comprensión de tareas con patrones. No podemos obviar que en ocasiones el libro de texto y las fichas se postulan como una herramienta de apoyo para los docentes, dejando poco espacio para abordar conceptos y procedimientos matemáticos desde otros escenarios más manipulativos, concretos y significativos para los niños (Alsina, 2020).

Por ende, nuestro propósito es aportar evidencias que permitan contrastar la comprensión de tareas con patrones desde contextos concretos y abstractos, para de esta manera iniciar una aproximación al modo en que los niños de 4 a 6 años ejecutan patrones de repetición y exteriorizan su representación. Para realizar este análisis comparativo se considera el Enfoque de Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (Alsina, 2020), en adelante EIEM, y se muestran los resultados obtenidos de manera longitudinal a partir del uso de recursos manipulativos y recursos gráficos.

Desde esta perspectiva nos formulamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo influyen los recursos manipulativos (RM) y los recursos gráficos (RG) en la comprensión de tareas con patrones de repetición?

De esta pregunta se derivan los siguientes objetivos de estudio:

1. Analizar la influencia que ejerce el contexto de aprendizaje en la comprensión de tareas con patrones de repetición.
2. Determinar la relación que se establece entre la comprensión y la representación de patrones de repetición.

MARCO TEÓRICO

En las siguientes líneas se abordan los pilares teóricos que sustentan el enfoque de EIEM y se define el patrón de acuerdo con la literatura contemporánea.

Por un lado, el EIEM (Alsina, 2020) establece tres niveles de enseñanza a partir de secuencias de aprendizaje intencionadas que avanzan de lo concreto a lo abstracto, ofreciendo una orientación de uso jerarquizado de los contextos y recursos que lo conforman en tres niveles: informal (vida cotidiana, recursos manipulativos y juegos); intermedio (recursos literarios y tecnológicos); y formal (recursos gráficos). Dicho enfoque está concebido como una herramienta para ayudar a los docentes a desarrollar la competencia matemática de los niños en los primeros niveles escolares, partiendo de la base de que para potenciar esta competencia es necesario diversificar los contextos de enseñanza-aprendizaje. Se fundamenta en tres pilares interrelacionados: a) la Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje Humano (Vygotsky, 1978), que concibe la educación como un fenómeno social y cultural que se basa

en el lenguaje y la interacción como herramientas fundamentales para promover el aprendizaje; b) el Modelo Realista de Formación del Profesorado (Korthagen, 2001), que considera que los profesores deben conocer muchas formas de actuar y ejercitarlas en la práctica, es decir, deben tener criterio para saber cuándo, qué y por qué algo es adecuado y reflexionar sobre ello de forma sistemática; y c) la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991), que fomenta el uso de situaciones cotidianas o problemas contextualizados como punto de partida para el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, los patrones son secuencias de elementos ordenados que se rigen por una organización replicable determinada, es decir, con una regularidad replicable (Papic et al., 2011). Su enseñanza mejora los hábitos mentales y desarrolla una habilidad cognitiva esencial en las matemáticas tempranas que permite reconocer y describir atributos de objetos, así como similitudes y diferencias entre ellos. Dicha enseñanza comprende una amplia gama de tareas para evaluar y fomentar las habilidades para hacer patrones (Lüken y Sauzet, 2020), es decir, un conjunto de competencias que se configuran como predictoras del rendimiento matemático en etapas posteriores: copiar, interpolar, extender, abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear (Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2017; Wijns et al., 2021). En esta línea, Du Plassis (2018, p. 3) constata que el conocimiento de patrones “permite ingresar al mundo algebraico del pensamiento generalizado”.

McGarvey (2013) considera que cuando se presentan los patrones a los niños de manera temprana, es más probable que desarrollen habilidades necesarias para comprender relaciones dentro de un patrón y comenzar a usar símbolos para representar esas relaciones. En este contexto, Rahmawati et al. (2017) conciben la representación en matemáticas como el medio para pensar y comunicar las ideas matemáticas, Por consiguiente, se asume que, desde una edad temprana, los niños deben representar para aprender y comprender patrones (Acosta et. al., en revisión).

MÉTODO

El presente estudio se enmarca en una investigación basada en el diseño (Design-based research [DBR]) donde se ha diseñado, validado y aplicado de manera longitudinal un itinerario de enseñanza de patrones para alumnos del segundo ciclo de Educación Infantil (3-6 años) que contempla los tres niveles del EIEM. Desde este marco metodológico pretendemos captar la complejidad de los contextos de enseñanza-aprendizaje para poder ofrecer orientaciones teóricas y prácticas que optimicen la gestión docente (Molina et al., 2011). Autores como Bakker (2019) y Molina (2021) destacan que esta metodología aboga por aumentar la transferencia y aplicabilidad del conocimiento, generando a su vez nuevas condiciones de aprendizaje, herramientas, estrategias o entornos que promuevan una mejora de la práctica educativa.

Diseño y procedimiento

Considerando los objetivos del estudio se han seleccionado las propuestas de los itinerarios de enseñanza de patrones de 2º y 3º de infantil (4-6 años) que corresponden a los recursos manipulativos y los recursos gráficos, respectivamente. El principal criterio de selección ha sido que se trata de propuestas ubicadas en polos opuestos del itinerario (niveles informal y formal respectivamente) y, por lo tanto, implican habilidades cognitivas diferentes (manipulación *vs.* formalización). Todas las propuestas fueron sometidas previamente a un juicio de expertos, cada curso escolar, por ocho miembros del Grupo de Trabajo “Investigación en Educación Matemática Infantil” de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. En la tabla 1 se muestran las actividades diseñadas y validadas.

Tabla 1. Propuestas de tareas con patrones en los recursos manipulativos y gráficos.

2º de Educación Infantil (4-5 años)	
Recursos manipulativos	<p>A1. Se propone a los alumnos crear seriaciones, con las piezas del <i>Pattern Blocks</i> (Geomosaico), siguiendo el patrón (AB), (AAB) o (ABB) que indican las tarjetas</p> <p>A2. Se pone a disposición de los alumnos cartulinas plastificadas con diferentes unidades de repetición (AB), (AAB) o (ABB). Se les invita a extender el patrón para completar las seriaciones con la ayuda de pinzas de ropa de colores.</p>
Recursos gráficos	A través de una tarea escrita previamente diseñada con diferentes tipos de toldos, se invita a los niños a completar la seriación.
3º de Educación Infantil (5-6 años)	
Recursos manipulativos	<p>A1. A partir de piezas translúcidas de diferentes formas y colores se invita a escoger una unidad de repetición determinada: (AB), (ABB), (AAB) o (ABC) para crear un collar en la mesa de luz siguiendo el criterio establecido.</p> <p>A2. Se pone al alcance de los alumnos piezas del <i>Pattern Blocks</i> (Geomosaico y material reciclado (tapas de botellas, corchos, conchas, botones, etc.) y se les propone construir de manera cooperativa un mandala gigante. De manera conjunta se decide que patrón se sigue en cada círculo concéntrico que conforma el mandala.</p>
Recursos gráficos	A través de fichas previamente diseñadas se invita a los alumnos a observar, analizar y leer las seriaciones propuestas para poder completar la seriación.

La implementación se ha llevado a cabo de manera longitudinal, con 24 niños españoles pertenecientes todos a una misma clase de un centro público. La muestra está conformada por 12 niños y 12 niñas, y la edad promedio de los participantes es de 4,8 años (2º de Educación Infantil) y 5,8 años (3º de Educación Infantil). La muestra ha sido seleccionada de manera intencionada, por las facilidades de acceso y el seguimiento longitudinal de la maestra tutora. Cabe destacar que previamente a la intervención, se obtuvo el consentimiento informado de todas las familias. Las sesiones se han distribuido en tres fases: a) introducción de la propuesta, b) interacción y desarrollo, y c) representación y reflexión. Durante la tercera fase, el docente promueve el razonamiento de los niños formulando preguntas que generen argumentación y evitando aquellas que se contestan con un “sí” o un “no”. Todas las propuestas se han desarrollado en subgrupos de 12 alumnos conformados de manera aleatoria.

Análisis de los datos

La recogida de datos se ha llevado a cabo en tres niveles, como se muestra en la figura 1.

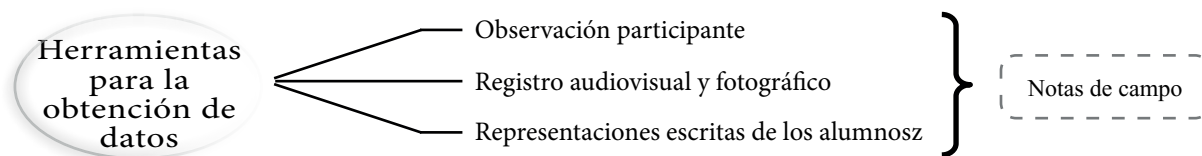


Figura 1. Técnicas y herramientas de recogida de información.

A través de un análisis descriptivo e interpretativo, se comparan los datos obtenidos a partir de las representaciones de los patrones realizadas por los participantes en cada contexto estudiado (recursos manipulativos y recursos gráficos) y en cada edad, de forma longitudinal.

Dichas representaciones, recogidas en formato de dibujo, se han categorizado siguiendo el diagrama que se muestra en la figura 2, con la intención de eliminar el sesgo que genera una presencia jerarquizada de propuestas de acuerdo con los planteamientos del EIAM (Alsina, 2020). Además, destacar que a) el grado de dificultad de las tareas es similar, ya que movilizan habilidades que no requieren el reconocimiento previo de la unidad de repetición para su resolución; y b) la actividad de recursos gráficos está vinculada con propuestas previamente abordadas en el contexto de situación de vida cotidiana. Se considera, pues, la categoría “correcto” cuando la representación no presenta errores e “incorrecto” cuando la producción presenta error en su estructura. Las transcripciones de los vídeos y las notas de campo han ayudado a contrastar los resultados obtenidos.

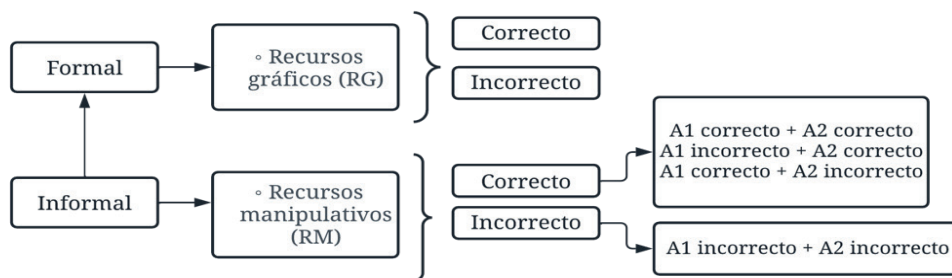


Figura 2. Diagrama de flujo con el proceso de categorización de las representaciones recogidas en formato dibujo.

RESULTADOS

Considerando la finalidad de nuestro estudio, se analizan los resultados obtenidos de manera longitudinal a partir del uso de recursos manipulativos (RM) y recursos gráficos (RG), con la intención de comprobar cómo influye el contexto de enseñanza en la comprensión de tareas con patrones de repetición. A pesar de que el P-valor calculado mediante el estadístico no paramétrico de McNemar para dos muestras apareadas con un nivel de confianza del 95%, no es significativo, sí que se observa una relevancia en cuanto a los porcentajes que se exponen a continuación.

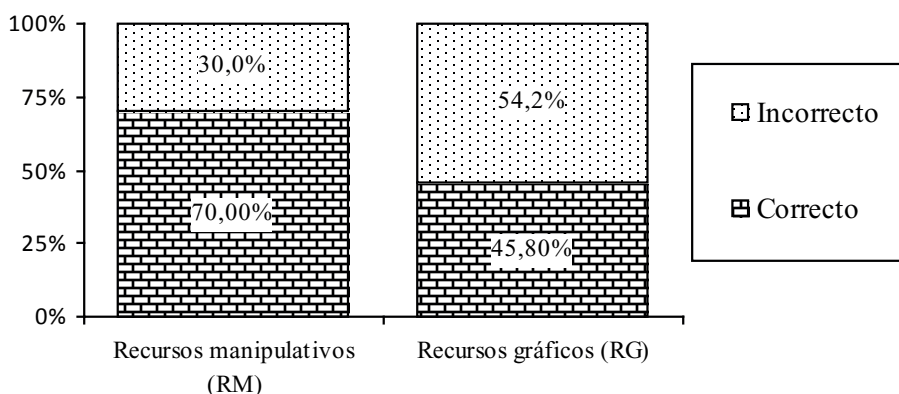


Figura 3. Resultados obtenidos para 4-5 años en cada contexto de aprendizaje.

De acuerdo con la información que se muestra en la figura 3, podemos apreciar que los errores fueron menores en el contexto de RM, representando un 30% frente a un 54.2% en los RG. En relación con

las representaciones correctas se aprecia una diferencia de aciertos del 24.2% entre los dos contextos analizados, apreciándose una clara presencia de producciones correctas en el contexto de RM.

Seguidamente, se exponen los resultados correspondientes para 5-6 años.

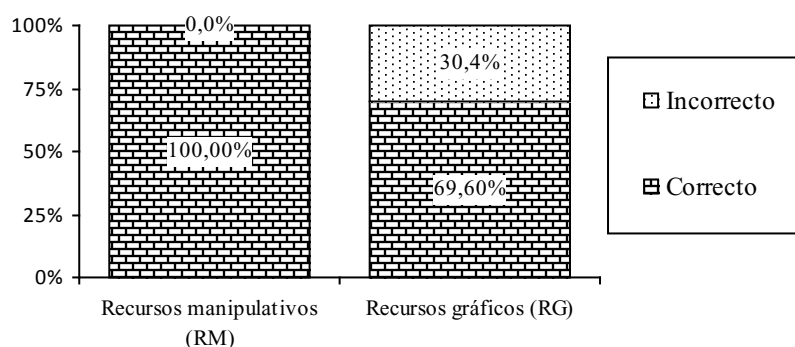






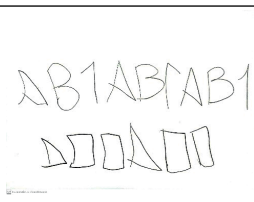
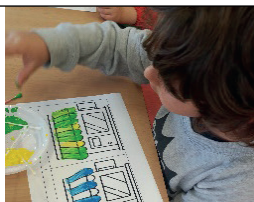
Figura 4. Resultados obtenidos para 5-6 años en cada contexto de aprendizaje

Tal y como se observa en la figura 4, el 100% de casos válidos representaron sin errores los patrones identificados en el contexto de RM, mientras que en el contexto de RG solo lo hizo el 69.6%. Apreciamos de manera general que, en comparación con la intervención del año anterior, los errores remitieron totalmente en el contexto de RM y que el grado de producciones correctas aumentó ligeramente en un 23.8% en el contexto de RG.

La tabla 2 muestra algunos ejemplos que nos han permitido analizar la relación que se establece entre la comprensión y la representación de patrones de repetición. Por razones de espacio se selecciona un ejemplo para cada recurso y edad.

Tabla 2. Ejemplos de representaciones correctas obtenidas en cada contexto según edad.

Contexto	4-5 años	5-6 años
 <p>Recursos manipulativos</p> <p>Dos alumnos trabajan en paralelo y uno de ellos expone que su patrón ▲▲■ es igual al de su compañero con forma</p> <p>Docente: ¿Y por qué dices que son iguales? Alumno: Porque los dos tienen dos figuras iguales y una diferente.</p>	 <p>Alumno: Yo ya completé la tira y mira una corona. Docente: Y ¿cómo es tu corona? Alumno: Le faltaban pinzas y las puse bien... una naranja y dos sin color, una naranja y dos sin color. Docente: Y ¿cómo sabías cuál era el color que tocaba? Alumno: Porque después de una naranja, venían dos sin color (...).</p>	 <p>Alumno: Yo haré uno muy difícil. Docente: ¡Oh! ¿Y cómo es uno muy difícil? Alumno: Con tres diferentes. Tengo que estar muy concentrado para no equivocarme. Docente: Muy bien, adelante con este reto.</p>
		 <p>Docente: Qué patrones habéis acordado? Alumno 1: Aquí con palos (blanco-verde-lila; blanco-verde-lila; blanco-verde-lila) Alumno 2: Aquí con tapas (dos blancas-una amarilla; dos blancas-una amarilla; dos blancas-una amarilla).</p>



Recursos gráficos

Alumno: Me gusta más este: dos verdes, uno amarillo, dos verdes, uno amarillo

Docente: ¿Y por qué?

Alumno: Hay que estar más concentrado para no equivocarse y porque mi color preferido es el verde.

Docente: ¿Nos explicas tu representación?

Alumno: Es el tordo que pinté. A mí me gusta el rosa y el lila.

Docente: Entonces el tordo también tenía dos colores iguales y uno diferente.

Alumno: Tenia amarillo y marrón.

Docente: El patrón de la ficha era ABCABCABC, el tuyo es AB1AB1AB1, ¿son iguales o diferentes?

Alumno: Son diferentes.

Docente: ¿Por qué?

Alumno: Porque tiene números.

Docente: Pero si nos fijamos los dos tienen tres elementos diferentes (ABC) y (AB1). Entonces los podríamos considerar iguales porque tienen la misma estructura de repetición.

Alumno: Faltaba un cuadrado y un triángulo en la primera fila.

Docente: ¿Cómo lo has sabido?

Alumno: Porque es cuadrado-cuadrado, triángulo, cuadrado-cuadrado, triángulo, cuadrado- (aquí faltaba el cuadrado), triángulo.

A partir de los ejemplos que se muestran en la tabla 2 se puede comprobar como la respuesta de los niños presentaba mayor nivel de sofisticación y justificación en el contexto de RM que en el de RG. De la misma manera destacar el rol del docente como guía e incitador de aprendizaje a través de preguntas deliberadas (*National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014*) que inviten a generar conocimiento compartido con el grupo de iguales.

CONSIDERACIONES FINALES

Nuestro estudio presenta datos relevantes que muestran que el grado de éxito de la comprensión de patrones a través de su representación está condicionada por el nivel de abstracción del contexto donde se lleva a cabo la propuesta. Desde este prisma, Mulligan et al. (2004) afirman que las imágenes externas de un niño reflejan las características estructurales de sus representaciones internas, permitiendo evidenciar la comprensión conceptual del niño. Por tanto, representar también se refiere al acto de externalizar una abstracción mental interna (Goldin, 2020).

Como se ha podido mostrar en el análisis de los resultados obtenidos, la presencia del error es menor en el contexto de RM, mostrando una gran diferencia en comparación con el contexto de RG. Con base en estos datos, se ha puesto de manifiesto que cuando los niños tienen la oportunidad de manipular, explorar, transformar y modificar un patrón de manera tangible son más capaces de comprender, generalizar y transferir este conocimiento a otras situaciones de aprendizaje, evidenciándose que los fenómenos educativos son sensibles al contexto.

Estos hallazgos pueden ser un apoyo para guiar la acción docente del profesorado a través de la reflexión (Radford y Sabena, 2015). En este sentido, es necesario planificar y estructurar tareas de patrones que contemplen diferentes contextos y recursos de enseñanza desde lo concreto hacia lo abstracto (Alsina, 2020), para así ofrecer una intervención educativa que permita ir avanzando hacia la generalización y formalización del conocimiento, evitando un tratamiento de los patrones exclusivamente de papel y lápiz.

La principal limitación del estudio ha sido que, al realizar el análisis comparativo con un solo grupo de alumnos de una clase a lo largo de dos cursos escolares, los datos obtenidos son poco generalizables. Así, pues, en futuras líneas de investigación será necesario ampliar la muestra y, a su vez, seguir analizando de manera longitudinal y transversal cómo influyen los demás contextos y recursos propuestos por el EIEM (contextos reales, juegos, recursos literarios y tecnológicos) en la enseñanza de patrones de repetición, explorando a su vez las habilidades de modelado desde una visión dialógica y multimodal que contemple diversos escenarios educativos.

Agradecimientos

Este trabajo fue respaldado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de España bajo la Subvención para Formación de Profesorado Universitario (FPU16-01856) y por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447.

Referencias

- Acosta, Y. y Alsina, Á. (2021). Aprendiendo patrones en Educación Infantil: ¿Cómo influye el contexto de enseñanza? En P.D. Diago, D.F. Yáñez, M.T. González-Astudillo y D. Carrillo. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 101-108). Valencia: SEIEM.
- Acosta, Y., Alsina, Á. y Ayala-Altamirano (en revisión). Beginning the representation of patterns in different contexts with 4-year-old children.
- Alsina, Á. (2020). El enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué?, y ¿cómo aplicarlo en el aula? *Tangram*, 3(2), 127-159.
- Bakker, A. (2019). *Design research in education*. Routledge
- Callejo, M. J., García-Reche, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 5-25
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. ICME-13 Monographs (pp. 107-138). Chaim, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5
- Cetina-Vázquez, M. y Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(1), 65-86. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3096>
- Du Plessis, J. (2018). Early algebra: Repeating pattern and structural thinking at foundation phase. *South African Journal of Childhood Education*, 8(2), a578. <https://doi.org/10.4102/sajce.v8i2.578>
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Goldin, G. A. (2020). Mathematical representations. En S. Lerman (Eds), *Encyclopedia of mathematics education*. Springer
- Korthagen, F. A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Lüken, M. (2018). Is patterning a mathematical activity? —An analysis of young children's strategies in working with repeating patterns. In *A mathematics education perspective on early mathematics learning—POEM*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_5

- Lüken, M. M. y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*. <http://10.1080/10986065.2020.1719452>
- McGarvey, L. M. (2013). Is it a pattern? *Teaching Children Mathematics*, 19(9), 564-571. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.19.9.0564>
- Molina, M., Castro, E., Castro E. y Molina, J. L. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D., Diago, D. F., Yáñez, M. T., González-Astudillo y D., Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). SEIEM.
- Mulligan, J. T., Prescott, A. y Mitchelmore, M. C. (2004). Children's development of structure in early mathematics. En M. Heines y A. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 393-401). Bergen University College.
- Mulligan, J. T., Oslington, G. y English, L. D. (2020). Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM—International Journal of Mathematics Education*, 52, 663-676. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9>
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of pre-schoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42, 237-268.
- Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: A systematic review from the mkt perspective. *Mathematics*, 9(20), 2590. <https://doi.org/10.3390/math9202590>
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 83-96. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0>
- Radford, L. y Sabena, C. (2015). The question of method in a Vygotskian semiotic approach. En A. Bikner-Ahsbabs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 157-182). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7
- Rahmawati, D., Purwanto, S., Hidayanto, E. y Bustanul, R. (2017). Process of mathematical representation translation from verbal into graphic. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 12(3), 367-381.
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G. y Farran, D. C. (2017). Early math trajectories: Low-income children's mathematics knowledge from age 4 to 11. *Child Development*, 88(5), 1727-1742. <https://doi.org/10.1111/cdev.12662>
- Swan, M. (2020). Design research in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 192-195). Springer.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B. y Torbeyns, J. (2021). Associations between repeating patterning, growing patterning, and numerical ability: A longitudinal panel study in four- to six-year olds. *Child Development*, 92, 1354-1368. <https://doi.org/10.1111/cdev.13490>