

UNA HERRAMIENTA PARA ANALIZAR RECURSOS EDUCATIVOS DE TELESECUNDARIA: EL CASO DE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

A tool for analyzing Telesecundaria educational resources: The case of division of fractions

Angel, A.^a, Figueras, O.^a y Valenzuela, C.^b

^aCinvestav, ^bUniversidad de Guadalajara

Resumen

Telesecundaria es una modalidad de la educación secundaria en México que cuenta con diversos recursos educativos. En este informe se describe el diseño de una herramienta que consiste en una red de conceptos para caracterizar problemas multiplicativos con fracciones. Su uso se ejemplifica al hacer un análisis de los recursos para el alumno y el maestro de Telesecundaria, tales como situaciones de enseñanza y aprendizaje incluidas en los libros de texto y los recursos digitales que en esos se refieren. Como parte de los resultados se identificaron tareas de resolución de problemas multiplicativos con diversas estructuras y contextos. Los modelos de la división de fracciones identificados son parte-todo, cuotición, aplicación por escala y composición de aplicaciones. Los usos y aspectos de las fracciones encontrados son descriptor, mensurador, comparador, operador razón, transformador y operador fracción.

Palabras clave: división de fracciones, problemas multiplicativos, recursos educativos, telesecundaria.

Abstract

Telesecundaria is a modality of secondary education in Mexico that has many educational resources. This report describes the design of a tool that consists of a network of concepts to characterize multiplicative problems with fractions. Its use is exemplified by analyzing the resources for the Telesecundaria student and teacher, such as teaching and learning situations included in textbooks and the digital resources referred in those. Multiplication problem solving tasks with diverse structures and contexts were identified. The models of division of fractions identified are part-whole, quotation, application by scale and composition of applications. The uses and aspects of fractions found are descriptor, measurer, comparator, ratio operator, transformer, and fraction operator.

Keywords: division of fractions, multiplicative problems, educational resources, telesecundaria.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

La educación secundaria en México se imparte en varias modalidades, entre ellas la Telesecundaria (12- 14 años), en la que solo un profesor es responsable de impartir todas las asignaturas de un determinado grado escolar. Sin embargo, la falta de especialización de los profesores ha contribuido a que tengan dificultades con el dominio de los contenidos que enseñan (Flores y Rebollar, 2008), en particular de los matemáticos. Para preparar sus clases el profesor tiene a su alcance diversos recursos

Angel, A., Figueras, O. y Valenzuela, C. (2022). Una herramienta para analizar recursos educativos de telesecundaria: el caso de la división de fracciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 139-147). SEIEM.

educativos impresos y digitales que han sido elaborados por las autoridades educativas, como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de esa modalidad. El profesor dispone, por un lado, de libros para el maestro para cada asignatura y recursos audiovisuales que tratan de las didácticas específicas de las materias que enseña, y por otro lado, de los libros de texto de los alumnos de cada una de las asignaturas, así como de los recursos audiovisuales e informáticos referidos en esos, disponibles en el portal de Telesecundaria (<http://telesecundaria.sep.gob.mx/>) (SEP, 2010). En los libros de texto de matemáticas de 1º y 2º grados del alumno, una parte considerable del contenido se refiere al estudio y uso de la aritmética de las fracciones. Temas que resultan difíciles tanto para estudiantes como para profesores de primaria y secundaria (Ball, 1990; Contreras y Gómez 2006; Valenzuela et al., 2017; Siegler y Lortie-Forgues, 2017).

Esta comunicación es parte de una investigación en curso, en la cual se tiene la hipótesis de que el profesor amplía sus conocimientos sobre multiplicación y división de fracciones, y su enseñanza con la integración de una variedad amplia de tecnologías, por un lado, al preparar su intervención haciendo uso de los recursos educativos que tiene disponibles, y por otro, al usar aquellos que están diseñados para favorecer el aprendizaje de sus alumnos. El objetivo de este informe es reportar: 1) la construcción de una herramienta de análisis para los problemas multiplicativos de división de fracciones; y 2) una caracterización del contenido matemático sobre división de fracciones, presente en los recursos educativos de Telesecundaria, que resulta del análisis que se hizo en virtud de que si se quiere probar la hipótesis mencionada es importante saber qué es lo que las autoridades educativas pretenden que el profesor sepa y enseñe sobre la división de fracciones.

MARCO TEÓRICO

El marco de los Modelos Teóricos Locales (MTLs) desarrollado por Filloy (1999) es un marco teórico y metodológico que se construye considerando cuatro componentes: 1) los modelos de competencia formal -que se abrevia como componente formal-; 2) los modelos de enseñanza, 3) los modelos de comunicación, 4) los modelos de procesos cognitivos, y sus relaciones. “Los MTLs los elaboramos para dar cuenta ... de fenómenos que se producen en situaciones de enseñanza y aprendizaje, pero además concebimos las situaciones de enseñanza y aprendizaje como situaciones de comunicación y de producción de sentido” (Puig, 2008, p. 88).

La indagación global se estructura usando el marco de los MTLs y se enfoca en cómo los profesores de Telesecundaria amplían sus conocimientos sobre multiplicación y división de fracciones en la práctica. Al construir un MTL se busca dar una propuesta para analizar e interpretar cómo ocurre ese fenómeno. En este caso, el componente formal se relaciona con un análisis sobre la multiplicación y división de fracciones, mientras que el análisis de los textos matemáticos que se encuentran en los recursos educativos que usan los profesores, en el que se caracterizan los contenidos y modelos que se emplean para la enseñanza de esos conceptos, forma parte del componente de los modelos de enseñanza. El componente de modelos de comunicación se refiere a la descodificación que hacen los docentes de los mensajes emitidos por medio de los recursos educativos, y finalmente, el componente de modelos de procesos cognitivos versa sobre el conocimiento de los profesores. En esta comunicación se muestran avances de la construcción de los primeros dos componentes del MTL.

CONSTRUCCIÓN DEL COMPONENTE FORMAL

A continuación, se describen los elementos que integran el Componente Formal, a fin de analizar el objeto matemático de la investigación. Esos elementos se entretajan y constituyen las variables de análisis de la herramienta que los autores han construido.

Usos y aspectos de las fracciones. Principalmente se considera la fenomenología didáctica desarrollada por Freudenthal (1983) y los usos y aspectos de las fracciones que él mismo identificó. Estos se interpretaron y esquematizaron por Valenzuela et al. (2017). Los usos son descriptor, fracturador, mensurador, comparador, operador y número, mientras que los aspectos son operador fracturante, transformador, operador razón, relación de fractura y relación razón.

Algoritmos de la división. Son las secuencias de pasos o procedimientos para dividir fracciones.

Modelos de la división. De acuerdo con Puig y Cerdán (1988) en algunos problemas aritméticos escolares verbales (PAEVs) se reflejan modelos para las operaciones aritméticas que nos permiten atribuirles varios significados. Como los modelos de partición y cuotición que refieren los investigadores en el caso de la división de números naturales, enteros y decimales. Además de esos modelos para la división, Greer (1992) menciona otros en los que se usan el mismo tipo de números. Se asume que el significado de la división de fracciones también está en función de un modelo y con esta variable se pretende indagar cuáles son los modelos de la división que corresponden a este tipo de números.

Estructura multiplicativa. Vergnaud (1991) llama relaciones multiplicativas a aquellas que se comportan como una multiplicación o una división, y hace una clasificación de los problemas multiplicativos con base en la forma de la relación multiplicativa que se encuentra en ellos. Cuando se trata de problemas aritméticos verbales, se deben considerar las relaciones entre las cantidades que intervienen en los enunciados. Los tipos de estructuras multiplicativas que propone son: 1) isomorfismo de medidas, para las relaciones entre cuatro cantidades; 2) producto de medidas, para las relaciones entre tres cantidades; y 3) un solo espacio de medida, cuando la relación es entre dos cantidades.

Estructura de las cantidades. Una cantidad es un número acompañado de una unidad de magnitud (Puig y Cerdán, 1988). Partiendo de la investigación de Schwartz (1988) se establece que una cantidad extensiva (E) expresa la extensión de una entidad o sustancia y “responde a la pregunta cuánto o cuántos de una cantidad asociada a un tipo de objetos” (Gómez, 2011, p. 44), por ejemplo, 8 $\frac{3}{5}$ vueltas y 1/4 km. Una cantidad intensiva (I) es aquella que expresa “una cualidad, un aspecto intensivo ... pero no nos dice cuántos hay de una cantidad en términos absolutos” (p. 44), además su magnitud se puede expresar en términos de una relación en la que interviene la palabra por, como en 1/2 kg por bolsa. En los PAEVs pueden aparecer escalares: números sin magnitud y se consideran cantidades intensivas porque se pueden escribir como una razón entre dos cantidades que se comparan, por ejemplo $\frac{3}{2}$ veces.

Palabras clave de los PAEV. En el enunciado de un PAEV, Puig y Cerdán (1988) consideran como palabras clave los verbos, las palabras o grupos de palabras que funcionan como conectivos o que expresan relaciones que influyen en la elección de una operación aritmética. Al considerar esta variable se busca enriquecer el grupo de las palabras clave para la división que se han identificado previamente en la investigación.

METODOLOGÍA

El marco de los MTLs además de ser un marco teórico, es un marco metodológico. Desde la propia estructura metodológica de los MTLs se distinguen dos etapas para su construcción. La primera consiste en un análisis teórico para la construcción de los componentes del MTL, y la segunda en una etapa experimental, misma que para esta investigación se desarrollará con profesores. La parte de la investigación que se reporta en este documento corresponde a la primera etapa y trata de la construcción de los Modelos de Competencia Formal y Modelos de Enseñanza. Como resultados se tienen 1)

el diseño de una herramienta conceptual para el análisis de los recursos educativos de Telesecundaria sobre la multiplicación y división de fracciones; y 2) una caracterización de los distintos recursos educativos de Telesecundaria sobre los temas mencionados.

En el siguiente apartado se describen los resultados de un análisis cualitativo sobre el contenido de una secuencia didáctica del libro de texto para el alumno de segundo grado de Telesecundaria (SEP, 2019, pp. 22-31), para ejemplificar el uso de la herramienta en la construcción del componente de Modelos de Enseñanza. El proceso de análisis se esquematiza en la figura 1, en la que, del lado derecho se muestra la herramienta de análisis y sus elementos, y del lado izquierdo cómo inicia el proceso de análisis de una actividad propuesta en cualquiera de los recursos audiovisuales, informáticos o libro de texto. Cada secuencia didáctica del libro de texto del alumno se organiza en sesiones. Una sesión incluye en promedio cinco actividades. Durante el análisis, los autores clasificaron primeramente el tipo de tarea propuesta en cada actividad, en virtud de que no todas las actividades comparten la misma estructura. En la figura 1 se muestra que para el análisis de las tareas de tipo 2 y 3, no se usan los elementos del inciso d). También se identifica el contexto en el que se propone la actividad, distinguiendo entre si los números se usan de forma abstracta o para hacer referencia a alguna situación o actividad cotidiana, esto con la intención de determinar cómo se problematiza el estudio de la división de fracciones en esos recursos.

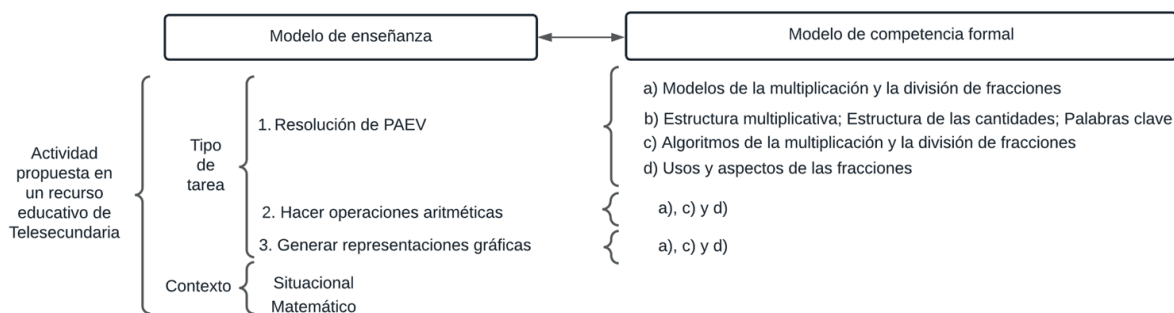


Figura 1. Esquema del análisis y las variables consideradas.

RESULTADOS

Al hacer el análisis de los textos matemáticos de los recursos educativos los autores encontraron dos elementos que se deben considerar como variables y que se refieren a características del diseño del Modelo de Enseñanza, estos son Tipos de tareas y Contextos, los cuales se describen a continuación.

Tipos de tareas. Las actividades propuestas en el libro de texto analizado (SEP, 2019) tienen un enfoque de resolución de problemas, sin embargo, no todas comparten la misma estructura, por ello se hizo una clasificación del tipo de tareas, en este caso los autores identificaron tres tipos: 1) resolver problemas aritméticos escolares verbales (PAEV), los cuales se plantean en enunciados y preguntas de varios incisos, algunos implican complementar tablas; 2) hacer operaciones aritméticas, como ejercicios de cálculo; y 3) generar representaciones gráficas, dada una figura se le aplica un factor de escala para trazar otra.

Contextos: Los contextos de las tareas se clasifican en: 1) situacionales, si se hace referencia a situaciones o actividades cotidianas; y 2) matemáticos, si se usan los números de forma abstracta.

La secuencia didáctica analizada del libro de texto titulada: multiplicación y división de fracciones positivas, se divide en cinco sesiones. Al término de dos de las sesiones se indica el uso de un recurso audiovisual, y además, el empleo de un recurso informático al finalizar la secuencia. A continuación,

se ejemplifica el análisis del contenido de una actividad del libro de texto del alumno y de un recurso informático referido en ese.

PAEV planteado en el libro de texto: Cuántas veces cabe

La sesión 2 inicia con una tarea de tipo resolución de un PAEV, cuyo contexto es distribuir una bebida. El enunciado dice lo siguiente: “Trabajen en pareja y resuelvan el siguiente problema. Para la fiesta de cumpleaños de su hija, Aidé ha preparado 24 litros de agua de jamaica. Usará vasos de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántos vasos podrá llenar?” (SEP, 2019, p. 24). Más adelante en el texto se comenta que una de las maneras de resolver el problema consiste en hacer una tabla como la que se muestra en la figura 2.

El algoritmo propuesto para la resolución del PAEV consiste en usar una tabla de proporcionalidad entre litros y vasos, como herramienta para determinar el resultado. Para ello, se debe considerar que con cada litro de agua es posible llenar 4 vasos, es decir, $\frac{1}{4}$ litro cabe 4 veces en 1 litro, por lo que se identifica el uso de la fracción $\frac{1}{4}$ litro como mensurador. El modelo de la división identificado es el que Puig y Cerdán (1988) llaman cuotición y afirman que la división se puede resolver haciendo una sustracción de manera reiterada. En este caso, esto consistiría en sustraer $\frac{1}{4}$ litro de los 24 litros un total de 96 veces.

Litros	1	2																	
Vasos	4	8																	

Figura 2. Tabla que indica la cantidad de vasos de $\frac{1}{4}$ litro que se pueden llenar con 1 y 2 l de agua (SEP, 2019, p. 24)

Finalmente, respecto a los elementos de los PAEV: la estructura multiplicativa identificada es la de isomorfismo de medidas, como se muestra en la figura 3. Por otro lado, dado que 24 litros es una cantidad extensiva (E) y $\frac{1}{4}$ de litro por vaso es una cantidad intensiva (I), la estructura de las cantidades del PAEV es del tipo $E/I=E'$, donde E' es otra cantidad extensiva que representa a 96 vasos. Finalmente, la palabra clave que se asocia a la división cuotitiva es: cuántos, que se encuentra en la pregunta del PAEV, y se relaciona con el contexto, es decir, cuántos vasos se pueden llenar. Más adelante en este informe se amplía el significado de esta palabra clave.

M_1 : Vasos de $\frac{1}{4} l$	$\xrightarrow{\text{Regla de correspondencia}}$	M_2 : Litros de agua de jamaica
1		$\frac{1}{4}$
4	$\times \frac{1 \text{ litro}}{4 \text{ vaso}}$	1
?		24

Figura 3. Estructura multiplicativa del PAEV: un isomorfismo de medidas.

Recurso informático referido en el libro de texto: multiplicar por el recíproco

Al finalizar la secuencia didáctica, en el libro de texto se propone el uso de un recurso informático en el que se plantean tres problemas de multiplicación de fracciones y dos de división de fracciones, uno de ellos se muestra en la figura 4.

La actividad consiste en la resolución de un PAEV cuyo contexto situacional es el embotellamiento de un producto. Se trata de arrastrar las opciones correctas a los recuadros que se muestran en pantalla. Para ello, se debe establecer en primer lugar cuál es la división de fracciones que resuelve el PAEV. Hay que elegir los números adecuados entre las ocho opciones posibles. En este caso se trata de las fracciones 21/1 litros de suavizante entre 3/4 de litro de suavizante por 1 botella. El uso de la fracción 21/1 es de descriptor de una medida, mientras que 3/4 se usa como mensurador porque es la unidad con la que se miden 21/1 litros.

En la primera igualdad de la figura 4, la división se resuelve usando el algoritmo de la división que implica multiplicar el dividendo por el recíproco del divisor. Después se hace la multiplicación de acuerdo con el algoritmo de la multiplicación de fracciones que ha sido referido en otros recursos educativos previamente. Se debe plantear una multiplicación de fracciones de tal manera que el producto sea la fracción 84/3. Finalmente, se simplifica la fracción y se obtiene el resultado 28 botellas. El modelo de la división de fracciones identificado es el que Puig y Cerdán (1988) denominan división cuotición y Greer (1992) llama modelo de medidas iguales. La palabra clave que se identifica es cuántos, vinculada al contexto del proceso de embotellar sustrayendo reiteradamente y preguntando cuántas veces fue posible hacerlo.

Enunciado del PAEV:

Una empresa quieren [sic] embotellar 21 litros de suavizante. Si cada botella tiene una capacidad de (3)/4 de litro [sic]. ¿Cuántas botellas necesitarán?

Arrastra las opciones correctas

Una empresa quieren embotellar 21 litros de suavizante. Si cada botella tiene capacidad de (3)/4 de litro. ¿Cuántas botellas necesitarán?

$$\frac{\boxed{}}{1} \div \frac{3}{\boxed{}} = \frac{21}{1} \times \frac{4}{\boxed{}} = \frac{84}{3} = \boxed{} \text{ botellas}$$

21
4
41
24
3
84
0
28

Revisar

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA 2020 PANTALLA 1 2 3 4 5 6 7 8

Figura 4. PAEV planteado en el recurso informático: Multiplicar por el recíproco (http://telesecundaria.sep.gob.mx/Content/Repositorio/informaticos2/Alumno/Material/Matematicas/B1_1_multiplicar_reciproco/)

Dado que se hace la división, 21 litros entre 3/4 litro por botella igual a 28 botellas, la estructura de las cantidades es del tipo E/I=E'. La estructura multiplicativa del PAEV es un isomorfismo de medidas y se representa en la figura 5. En este caso se pregunta por el multiplicador y se divide por el multiplicando, igual que lo esquematizan Puig y Cerdán (1988) y Contreras y Gómez (2006).

	Regla de correspondencia		
M ₁ : Botellas de $\frac{3}{4} l$	→	M ₂ : Litros de suavizante	
1	× $\frac{3 \text{ litro}}{4 \text{ botella}}$	$\frac{3}{4}$	
?		21	

Figura 5. Estructura multiplicativa del PAEV: un isomorfismo de medidas.

Resultados generales del análisis de las actividades del libro de texto

Los usos y aspectos de las fracciones que se favorecen más en la secuencia didáctica analizada son el de descriptor, mensurador y operador fracción. El uso como operador fracción se observa en el momento en que se hace una división de fracciones en un contexto numérico, en el que la división se transforma en una multiplicación por el recíproco de la fracción divisor. Otro de los usos que se hace de las fracciones es el de comparador, esto se identificó en tres de las cinco sesiones de la secuencia didáctica analizada. En esas sesiones, situadas en un contexto geométrico, se muestran figuras equivalentes y la actividad consiste en determinar los factores de escala que permiten obtener una figura a partir de otra. Por eso, el aspecto de la fracción es el de transformador, cuando se trata de dibujar las figuras, ya que el factor de escala se aplica a la figura sin fracturarla, sino transformarla de manera uniforme. Cuando las figuras están dadas, y se debe encontrar el factor de escala, que es una fracción, su aspecto es el de operador razón.

En los recursos educativos de Telesecundaria se identificaron cuatro algoritmos distintos para hacer una división con fracciones: elaborar una tabla de proporcionalidad, multiplicar por el factor recíproco del divisor, hacer productos cruzados, y contar cuántas veces cabe el divisor en el dividendo en una representación gráfica. El algoritmo de productos cruzados se menciona solamente en el audiovisual dirigido al profesor de Telesecundaria.

Los esquemas de los isomorfismos de medidas con los que se han ejemplificado las estructuras multiplicativas de los PAEVs muestran la relación de proporcionalidad entre las cantidades involucradas. Además de ese tipo de estructura, se identificó otro de un solo espacio de medida. En ese, en lugar de establecer una regla de correspondencia, se usa un escalar para indicar la relación multiplicativa entre dos cantidades en dos sentidos. Para ir en un sentido se multiplica por el escalar y en el otro sentido por su recíproco. En los PAEVs planteados en la secuencia didáctica analizada del libro de texto de Telesecundaria y los recursos digitales referidos en ese, como ya se mencionó, se identificó la estructura del tipo $E/I=E'$. Este tipo de estructura también se encontró en las tareas de generar representaciones gráficas en las que, dada una figura se construye otra equivalente a escala. Otro tipo de estructura de las cantidades identificada en tareas en las que el modelo de la división es la composición de aplicaciones, es el de $E/E'=I$.

Los modelos de la división de fracciones que se identificaron son parte-todo, cuotición, aplicación por escala y composición de aplicaciones. Los primeros dos han sido identificados previamente por otros investigadores (Puig y Cerdán, 1988; y Greer, 1992), mientras que los segundos son nuevos en ese sentido. La palabra clave identificada en la secuencia analizada en el modelo de aplicación por escala y composición de aplicaciones es factor de escala. Mientras que, en el modelo de parte-todo es la palabra fracción, que también aparece en un PAEV referido por Greer (1992). En el caso del modelo de cuotición, los contextos situacionales de los ejemplos que aparecen en general en la secuencia analizada refieren acciones de llenar, hacer, embotellar, partir, y comunican la idea de distribuir mediante un proceso de sustraer reiteradamente lo que la fracción mensuradora indica. En todos los ejemplos se pregunta “cuántos” o “cuántas” se pueden llenar, hacer, embotellar y obtener respectivamente. Sin embargo, son las expresiones usadas en las preguntas: “cuántos vasos podrá llenar”, “cuántas botellas necesitarán”, etc., en las que se establece la relación entre las cantidades que desempeñan un papel relevante en el problema. Estas son las palabras clave identificadas, en relación con cuántas veces cabe la fracción mensuradora en la unidad.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis de los recursos educativos que se llevó a cabo ha permitido ver el papel destacado que se le da en Telesecundaria al tipo de tarea de resolución de PAEVs para el estudio de la división de

fracciones. En la secuencia didáctica analizada se considera mayormente a la división de fracciones como un caso especial de multiplicación de fracciones, un tema que se ha tratado en contenidos previos. El modelo para la división que más se usa en los recursos educativos es el de cuotición. Una de las fortalezas de este modelo es que es adecuado para números naturales, decimales como lo ejemplifican Puig y Cerdán (1988) y Greer (1992), y para fracciones como se ha ejemplificado en este informe. Además, las palabras clave que se asocian con este modelo, que tienen que ver con preguntar cuántas veces cabe un número en otro, son las que pueden favorecer a que el usuario de los recursos educativos amplíe sus conocimientos sobre la división al responder esta pregunta considerando otra clase de números. Estas características de los recursos educativos se consideran potenciales para ampliar el conocimiento de los profesores en particular, sobre la división de fracciones.

Con las actividades de generar representaciones gráficas se contribuye a que los usuarios de los recursos educativos puedan corroborar de manera visual que hay casos en los que la multiplicación da como resultado productos menores que los factores correspondientes. Asimismo, que hay casos en los que la división da como resultado un cociente mayor que el divisor y el dividendo. Para Siegler y Lortie-Forgues (2015) esto contribuiría a la comprensión de las operaciones aritméticas de multiplicación y división, ya que es necesario conocer la dirección de los efectos que producen. La herramienta empleada para analizar los recursos educativos ha permitido notar sus limitaciones, en términos de la ausencia de otros tipos de estructura de las cantidades, estructuras multiplicativas y modelos de la división.

La caracterización de los recursos educativos que se ha hecho será fundamental para el diseño de actividades en la segunda fase de la investigación. Además, de manera más amplia, esta es útil porque 1) describe la complejidad de la división de fracciones cuando se consideran más allá de los algoritmos, los fenómenos que organiza el concepto; 2) proporciona sugerencias para el diseño de actividades sobre división de fracciones; y 3) contribuye a enriquecer el estudio de los significados y estructuras de los problemas multiplicativos de división, hechos por Greer (1992), Puig y Cerdán (1988), Schwartz (1988) y Vergnaud (1991) en los que usan números naturales, enteros y decimales pero no fracciones.

Referencias

- Ball, D. L. (1990). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, 90(4), 449-466. <https://doi.org/10.1086/461626>
- Contreras, M. y Gómez, B. (2006). Sobre problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 171-184). Huesca.
- Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Flores, R. C. y Rebollar, A. M. (2008). La telesecundaria ante la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana de Educación*, 44(7), 1-11. <https://doi.org/10.35362/rie4472187>
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.
- Gómez, B. (2011). Discontinuidad de los modelos de situación de las operaciones multiplicativas. *Educatio siglo XXI*, 29(2), 41-66.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. A. Grouws. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). National Council of Teachers of Mathematics.

- Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 107-126). Huesca.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.
- Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, 2, 41-52). National Council of Teachers of Mathematics.
- SEP (2010). *La telesecundaria en México: un breve recorrido histórico por sus datos y relatos*. Secretaría de Educación Pública. <http://www.sepbcs.gob.mx/contenido/documentos/educativo/telesecundarias/Breve%20Historia%20de%20Telesecundaria%20en%20Mexico.pdf>
- SEP (2019). *Matemáticas. Telesecundaria. Segundo grado (2.a ed.)*. Secretaría de Educación Pública. <http://telesecundaria.sep.gob.mx/Content/Repositorio/Alumno/Libros/2/Matematicas/TS-LPA-MATE-2-BAJA.pdf>
- Siegler, R. S. y Lortie-Forgues, H. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current directions in Psychological Science*, 26(4), 346-351. <https://doi.org/10.1177/0963721417700129>
- Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. y Gutiérrez-Soto, J. (2017). Mental object for fractions of middle school students with absenteeism problems. En E. Galindo y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 227-242). PME-NA.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas.