SENTIDO NUMÉRICO ACERCA DE LOS NÚMEROS REALES: CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES USADOS EN OPERACIONES DE FORMA GENERAL

Number sense about real numbers: Knowledge and skills used in operation in a general way

Garrido, V., Figueras, O. y Martínez, M.

Cinvestav

Resumen

Hacer operaciones de forma general, sin conocer los números con los cuales se hacen cálculos o estimaciones, requiere de un buen sentido numérico. En este informe se proporciona una caracterización del sentido numérico acerca de los números reales, misma que fue utilizada como herramienta para identificar conocimientos y habilidades que estudiantes recién ingresados al bachillerato –jóvenes de 15 y 16 años de edad– usaron para resolver operaciones de forma general. Los resultados obtenidos muestran que los alumnos recurren a la estrategia de asignar valores numéricos a los puntos representados con literales; a través de este acercamiento se observaron habilidades aplicadas y dificultades enfrentadas. Por lo cual es relevante continuar con el desarrollo y fortalecimiento del sentido numérico para mejorar el desempeño en matemáticas de estos estudiantes.

Palabras clave: *sentido numérico, números reales, estimación, operaciones de forma general, bachillerato.*

Abstract

Performing operations in a general way, without knowing the numbers with which calculations or estimates are made, requires good numerical sense. This paper provides a characterization of number sense about real numbers, which was used as a tool to identify knowledge and skills that newly enrolled high school students – 15 and 16-year-olds – used to solve in a general way. The results obtained show that the students resort to the strategy of assigning numerical values to the points represented with literals, through this approach applied skills and difficulties faced were observed. Therefore, it is important to continue developing and strengthening number sense to improve the performance of these students in mathematics.

Keywords: *number sense, real numbers, estimation, operations in a general way, high school.*

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Si a los estudiantes de educación media superior –jóvenes de 15 a 18 años de edad–se les planteara: a) dado un número positivo y otro negativo, ¿el producto de estos es mayor o menor que cero?, o bien, b) al dividir un número cualquiera entre 3/5 ¿el resultado es menor o mayor que el número que dividiste? se esperaría, en el primer caso, que se percataran de que el resultado debe ser un número negativo, por lo tanto, menor que cero; en el segundo caso, deberían notar que la división no siempre implica

Garrido, V., Figueras, O. y Martínez, M. (2022). Sentido numérico acerca de los números reales: conocimientos y habilidades usados en operaciones de forma general. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 315-323). SEIEM.

hacer más pequeño al dividendo. Sin embargo, ¿la mayoría de los alumnos reconocerá el efecto de las operaciones en estos casos?

El desarrollo del sentido numérico ha sido estudiado por investigadores de diferentes países. La mayoría de las indagaciones se han hecho con alumnos de educación básica –niños de 5 a 14 años de edad– (ver, por ejemplo, Reys y Yang, 1998; Löwenhielm et al., 2017; Almeida y Bruno, 2014). Los sistemas numéricos estudiados en este nivel educativo son los números naturales, enteros y racionales. Sin embargo, en el nivel medio superior es necesario que los estudiantes conozcan los números reales y sus propiedades, que sepan usarlos para hacer operaciones, que los representen de diferentes maneras y los utilicen para resolver problemas.

De acuerdo con los documentos oficiales, a saber, NCTM (2000), SEP (2020), MEFP (2022), por mencionar algunos, se espera que los estudiantes al concluir la educación primaria y secundaria hayan reflexionado sobre los números que usan, así como hecho actividades y resuelto problemas con la intención de desarrollar su habilidad para hacer operaciones con números concretos. En el caso de los jóvenes que estudian el nivel medio superior se espera que hagan operaciones de forma general, es decir, operaciones sin conocer los números con los cuales se hacen cálculos o estimaciones, como ab o a/b donde a y b son números reales.

Por lo que surge una pregunta de investigación: ¿qué conocimientos y habilidades acerca de los números reales usan los alumnos al resolver operaciones de forma general? Estos conocimientos y habilidades pueden ayudar a notar la presencia del sentido numérico que han desarrollado los estudiantes hasta antes de iniciar su educación media superior. Como objetivo se establece identificar el uso de los números reales que hacen los alumnos cuando efectúan operaciones de forma general. Es necesario aclarar que esta investigación es parte de un estudio más amplio, y que lo descrito en el documento está centrado solo en una parte del proyecto.

MARCO DE REFERENCIA

La importancia del sentido numérico en el aprendizaje de las matemáticas ha sido clara en todo momento; sin embargo, a qué se refiere la expresión sentido numérico ha dado lugar a que varios investigadores hayan propuesto una definición.

Greeno (1991) lo definió como una 'expertez' cognitiva, es decir, como el conocimiento que resulta de una actividad extensa a través de la cual las personas aprenden a interactuar exitosamente en diversos dominios conceptuales. Él describe al sentido numérico como un conocimiento situado dentro de un dominio conceptual y plantea metáforas con las cuáles es posible entender que el sentido numérico es diferente a los temas que regularmente se enseñan; pertenece a otra dimensión, si se imagina que las operaciones básicas están en un plano, el sentido numérico debería estar en una tercera dimensión; como un dron desde el cual se pueden ver y seleccionar las operaciones más convenientes para lograr un propósito.

A su vez Sowder (1992a) define el sentido numérico como una red conceptual bien organizada que le permite a uno relacionar las propiedades de los números y las operaciones, así como resolver problemas numéricos de formas flexibles y creativas. Para Marshall (1989), el sentido numérico es la riqueza de conexiones del conocimiento matemático.

Estas definiciones versan sobre los números naturales, enteros y racionales principalmente y han sido referenciadas en investigaciones como Alajmi (2009), Bracho-López et al. (2014), Fariña y Bruno (2021) porque son trabajos fundamentales sobre sentido numérico.

Las definiciones propuestas por Greeno, Sowder y Marshall han tenido gran aceptación por parte de la comunidad científica, empero son muy generales. Un investigador puede imaginar la 'expertez', la red conceptual o la riqueza de conexiones; pero observar ese tipo de cosas en el aula no es tarea fácil por lo que las autoras de este documento decidieron formular una caracterización que fuese operativa. La propuesta es: *El sentido numérico es el conjunto de conocimientos y habilidades acerca de los números reales que usa una persona para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias numéricas al resolver problemas.* Los conocimientos son las propiedades de dicho sistema numérico y las habilidades son sobre su uso y las diferentes formas de representarlos. En la tabla 1 se muestran las habilidades que se han propuesto para la investigación que se lleva a cabo.

Las primeras diez habilidades tienen como base los comportamientos que demuestran la presencia del sentido numérico sugeridos por Sowder (1992b). Las siguientes cuatro habilidades están relacionadas con conocimientos específicos de los números reales, tales como la densidad, la operación racionalización y la potenciación que tienen características distintas a las de los otros sistemas numéricos. La última habilidad fue propuesta por Resnick (1989), se refiere a que una persona debe reconocer cuando en un procedimiento es mejor detenerse e iniciar otro camino para encontrar la solución de algo.

Tabla 1. Habilidades asociadas al sentido numérico acerca de los números reales.

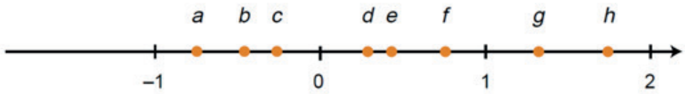
1.	Habilidad para componer, descomponer y recomponer números
2.	Habilidad para identificar cuál representación de un número es más conveniente que otra
3.	Habilidad para comparar números
4.	Habilidad para ordenar números
5.	Habilidad para lidiar con el orden de magnitud de un número en situaciones concretas
6.	Habilidad para usar puntos de referencia
7.	Habilidad para vincular símbolos de operación y relación de manera significativa
8.	Habilidad para reconocer los efectos de las operaciones en los números
9.	Habilidad para hacer cálculos mentales mediante estrategias propias
10.	Habilidad para hacer estimaciones
11.	Habilidad para asociar los números con el contexto en el que aparecen
12.	Habilidad para ubicar números en la recta numérica
13.	Habilidad para reconocer hechos dados
14.	Habilidad para distinguir diferencias y semejanzas entre los sistemas numéricos
15.	Habilidad para autorregularse

Estas habilidades podrían ser las que usen los estudiantes al resolver operaciones de forma general con los números reales, para observarlas se siguió la metodología descrita en la siguiente sección.

METODOLOGÍA

En la figura 1, se muestra un ítem en el que se requiere hacer operaciones de forma general, en lugar de hacer cálculos particulares; este también permite a los estudiantes reflexionar sobre las propiedades de los números involucrados, así como juzgar la razonabilidad de sus respuestas.

Dados los puntos como se muestran en la imagen:



1. ¿Qué punto está más cerca del producto ab? Justifica tu respuesta.
2. ¿Cuál punto correspondería al $|c|$? ¿Por qué?
3. ¿Qué punto de la recta representaría $\frac{1}{f}$? Argumenta tu respuesta.
4. ¿Qué punto está más cerca de $\sqrt{e}$? ¿Por qué?
5. ¿Cuál de los puntos está más cerca de $\sqrt{h}$? Justifica tu respuesta.

Figura 1. Adaptación del ítem propuesto por NCTM (2000).

El ítem anterior fue incluido en un examen inicial sobre sentido numérico que contestaron 56 estudiantes, cuya edad oscila entre los 15 y 16 años de edad y que en agosto del 2021 iniciaron su educación media superior.

En el marco de referencia se propusieron 15 habilidades que permiten identificar el uso del sentido numérico por parte de los estudiantes (ver tabla 1). La relación entre cada pregunta del ítem y las habilidades se puede observar en la tabla 2, esta es una guía para analizar los datos.

Tabla 2. Habilidades relacionadas con cada pregunta del ítem.

Pregunta	**Habilidades relacionadas**	**Explicación**
1. ¿Qué punto está más cerca del producto ab?	8, 10, 12	Notar que el producto de dos números negativos es un número positivo forma parte de reconocer el efecto de las operaciones, decidir qué punto a la derecha del cero está más cerca de *ab* está relacionado con la habilidad de ubicar ese producto en la recta. Hacer estimaciones también es necesario.
2. ¿Cuál punto correspondería al $|c|$?	6, 7, 12	El número cero es un punto de referencia para ubicar en la recta el valor absoluto de un número, vincular este símbolo con su significado ayuda a determinar el punto correspondiente.
3. ¿Qué punto de la recta representaría 1/f ?	3, 6, 8, 10	Es importante comparar el punto *f* con el número 1, porque este último es un punto de referencia. Dado que *f* está entre 0 y 1el efecto de las operaciones es importante para hacer una estimación.
4. ¿Qué punto está más cerca de √e?	6, 8, 10	En las preguntas 4 y 5, el número 1 es un punto de referencia que permite reconocer el efecto de las operaciones y con esta información hacer estimaciones.
5. ¿Cuál de los puntos está más cerca de √h?	6, 8, 10	

Recolección de datos

La aplicación del examen inicial se llevó a cabo de forma presencial en octubre de 2021 en dos sesiones. Por cuestiones de espacio no es posible comentar las otras preguntas del examen, pero esta en específico se planteó en la segunda sesión y el tiempo disponible para contestarla era de 30 minutos. De acuerdo con la organización de la escuela, los estudiantes estaban separados en dos grupos de 28 alumnos; a un grupo se le permitió el uso de calculadora y al otro no. Esta variante se propuso porque en investigaciones como la de Bobis (1991), Alajmi (2009) y Lyublinskay (2009) se plantea la posibilidad de usar recursos tecnológicos para desarrollar el sentido numérico; se decidió iniciar la exploración con la calculadora por ser un recurso de fácil acceso.

Se tomaron fotografías de ambos grupos y se grabó, un video de la sesión del grupo que usó calculadora con previa autorización de los alumnos. Como no fue posible enfocar la cámara y grabar qué tecleaban o qué cálculos hacían los estudiantes con ella, al final se les pidió que en una hoja blanca escribieran cómo usaron la calculadora y qué tipo de operaciones habían hecho con ella.

Análisis de los datos

El análisis de los datos se llevó a cabo bajo dos perspectivas. Una fue para determinar en cuáles preguntas se tuvo mayor o menor éxito, concentrando en tablas el conteo de respuestas correctas e incorrectas. En todo momento se tuvo cuidado de separar las respuestas que fueron dadas usando calculadora y aquellas en las que no; con la intención de obtener conclusiones sobre el uso de esta herramienta.

La otra mirada fue con el propósito de analizar los conocimientos y habilidades acerca de los números reales que los estudiantes evidenciaron al resolver las operaciones de forma general. En este análisis se usó la caracterización propuesta en el marco de referencia.

RESULTADOS

La tabla 3 es un ejemplo del registro que se hizo de las respuestas de los estudiantes, por cuestiones de espacio sólo se presenta esta.

Tabla 3. Análisis de la pregunta ¿qué punto está más cerca del producto ab?

Número de estudiantes	Con calculadora	27	Contestaron	26	Correctamente	3
					Incorrectamente	23
			No contestaron	1		
	Sin calculadora	29	Contestaron	29	Correctamente	0
					Incorrectamente	29
			No contestaron	0		

En las cinco preguntas se obtuvieron porcentajes de éxito menor al 10%. Por otro lado, se puede notar que no hay una diferencia significativa entre el número de respuestas correctas con uso de calculadora y sin ella.

Respecto a los conocimientos y habilidades que los estudiantes manifestaron para resolver operaciones de forma general, se tienen las siguientes observaciones.

La pregunta 2 fue contestada correctamente por 6 estudiantes, en sus respuestas se puede ver que usan como punto de referencia el número cero, vínculan el símbolo de valor absoluto adecuadamente y que interpretan este signo como una distancia (ver figura 2).

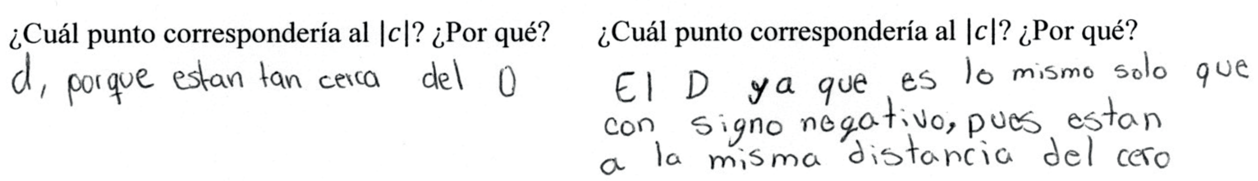


Figura 2. Respuestas a la pregunta 2, con uso de calculadora (izquierda) y sin uso de ella (derecha).

Solo un estudiante respondió acertadamente la pregunta 3, el conocimiento sobre el inverso multiplicativo de un número real parece ser tomado en cuenta al asegurar que *1/f*, o sea 1 entre 8/10 era igual a 5/4 (ver figura 3). La habilidad de comparar números es usada porque para proponer un posible valor de *f* es necesario determinar si el número elegido es mayor a cero y menor a 1. Sin embargo, no hay evidencia de que el estudiante haya reconocido el efecto de las operaciones y tampoco de haber hecho una estimación.

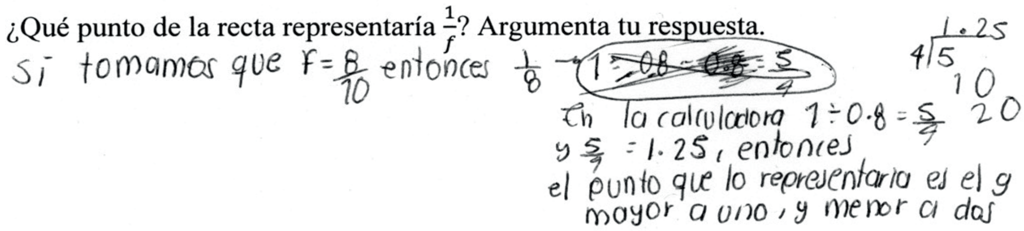


Figura 3. Respuesta a la pregunta 3 con uso de calculadora.

Además de los conocimientos y habilidades usados por los estudiantes para resolver operaciones de forma general, fue posible notar las dificultades que los alumnos enfrentaron al hacer estas operaciones. En la figura 4, se puede ver como un estudiante que podía usar su calculadora y recurre a la estrategia de asignar números decimales a los puntos no la utiliza para responder la pregunta 1 y tampoco logra reconocer el efecto de las operaciones porque da como resultado un número negativo. De hecho, tampoco ubica adecuadamente los números en la recta, enseguida del número 0.6 aparece el 1, situación que se repite en la parte de la recta que corresponde a los números negativos.

Otro ejemplo de que la habilidad de ubicar números en la recta numérica no se ha desarrollado con números concretos, ni de forma general, se muestra en la figura 5; en esa respuesta se puede ver como el número −1/4 está más cerca de −1 que de 0; incluso del lado de los números positivos el 1/5 está más cercano a 1 que el 1/2.

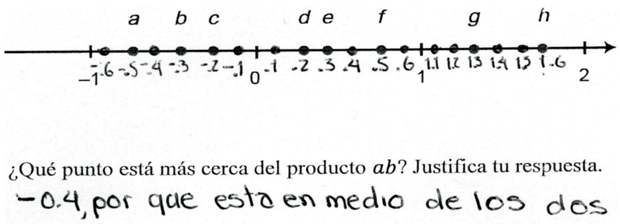


Figura 4. Respuesta de un estudiante que podía usar calculadora.

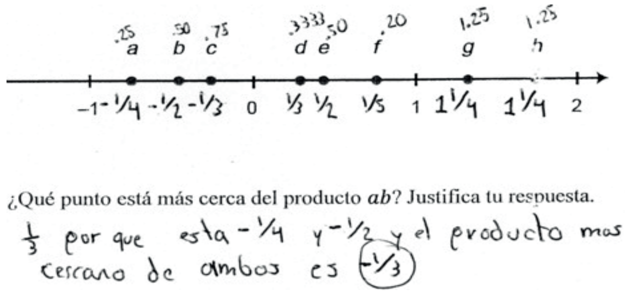


Figura 5. Respuesta de un estudiante que no podía usar calculadora.

En la pregunta 1, la mayoría de los estudiantes no reconoció que la expresión *ab* representaba el producto de dos números (ver figura 6) eso quiere decir que los alumnos al ingresar al nivel medio superior tienen dificultades para reconocer la operaciones de forma general.

¿Qué punto está más cerca del producto *ab*? Justifica tu respuesta.

La letra c por que esta enceguida de la letra ab o tambien podría ser el numero -1

¿Qué punto está más cerca del producto *ab*? Justifica tu respuesta.

Yo creo que el punto que es mas cercano a "ab" es "C" porque esta junto o a lado de estas dos letras o literales.

Figura 6. Respuesta de dos estudiantes que podían usar calculadora.

Al analizar los datos, se tomó en cuenta si las respuestas eran de un estudiante que usó o no la calculadora para ver si el uso de este recurso tecnológico implicaba un cambio significativo. En la figura 7 se muestran los comentarios de algunos estudiantes.

No la use porque no traía numeros la recta solo letras y pues no la use.

No use la calculadora, porque considere que no era necesario, ya que eran recta y como tal no había operaciones

no use la calculadora por que no sabia que operaciones hacer o no tenia claro como lo iba a hacer

Figura 7. Manuscritos de tres estudiantes sobre el uso de la calculadora.

Responder a la pregunta qué conocimientos y habilidades usan los estudiantes que ingresan al nivel medio superior al resolver operaciones de forma general es difícil, porque la mayoría de ellos asignan valores concretos a los puntos de la recta que aparece como parte del ítem. Entonces en lugar de resolver operaciones de forma general, intentan aproximar los resultados con números concretos. Al parecer los estudiantes todavía no tienen las herramientas necesarias para hacer este tipo de operaciones, por lo que es necesario llevar al aula de clases tareas como la mostrada en la figura 1 para motivar la reflexión sobre el efecto de las operaciones con números reales.

Algunos estudiantes al resolver operaciones con valores concretos retomaron conocimientos como la existencia de inversos multiplicativos, leyes de los signos, el número cero es neutro, el valor absoluto de un número se refiere a una distancia. Las habilidades que usaron para dar sus respuestas fueron: comparar números; usar los números −1, 0 y 1 como puntos de referencia; vincular símbolos de operación y relación; y hacer estimaciones de la raíz cuadrada de un número.

Sin embargo, los alumnos tuvieron dificultades para leer e interpretar la raíz cuadrada de una fracción, al parecer identifican qué significa el radical de un número natural pero no de una fracción o un número decimal. También tuvieron complicaciones para ubicar en la recta los números mayores a −1 y menores a 1, así como para compararlos y ordenarlos. Además, tuvieron conflictos para hacer operaciones con números negativos y fracciones, lo que dificultó reconocer el efecto de las operaciones.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Para que los estudiantes de nivel medio superior hagan operaciones de forma general, es necesario que tengan un buen sentido numérico, lo que cual significa que los alumnos desarrollen habilidades para usar los números reales (ver tabla 1). Razón por la cual, en la investigación global, de la cual forma parte este informe, se aborda cómo desarrollar el sentido numérico acerca de los números reales.

Existen investigaciones en las que se enfatiza el desarrollo del sentido numérico de estudiantes de nivel básico (ver Lyublinskay, 2009; Bracho et al., 2014; Sanfiel, Perdomo y Bruno, 2021); sin embargo, ese énfasis versa sobre actividades donde se usan los números naturales, enteros y racionales y los alumnos de bachillerato requieren desarrollar el sentido numérico acerca de los números reales para mejorar su desempeño en matemáticas, tal como lo describe Nguyen (2016).

En los cálculos escritos de los estudiantes se pueden ver errores, sin embargo, parece que los alumnos no son conscientes de ellos. La tarea propuesta, era un enunciado en el que la razonabilidad de las respuestas dadas jugaba con papel importante de acuerdo con NCTM (2000). Empero, hubo escasas alusiones en esa dirección, lo que podría estar relacionado con una falta de comprensión conceptual de los números según Fariña y Bruno (2021).

Con respecto al uso de la calculadora, una posible explicación de que no haya sido una herramienta que les ayudara a resolver operaciones de forma general es porque la reflexión sobre las propiedades de los números que se están usando debe ser hecha por los estudiantes previamente. Es probable que con los valores concretos tampoco usaron la calculadora porque como mencionan Figueras, Valenzuela y Martínez (2021) los profesores en México han recomendado tímidamente el uso de esta herramienta.

Bobis (1991) propuso que el uso de la calculadora podía contribuir al desarrollo del sentido numérico si se enseñaba a los estudiantes a hacer estimaciones antes de ver el resultado de una operación en la calculadora; además, en caso de ser necesario, que se cuestionara sobre la diferencia entre su estimación y el resultado obtenido con este artefacto. Como antes de proponer la tarea analizada no se dio ningún tipo de instrucción a los estudiantes sobre el funcionamiento o ventajas que ofrecía la calculadora, esta no fue una herramienta significativa.

Por otro lado, las habilidades propuestas en el marco de referencia permitieron identificar el desarrollo del sentido numérico que hasta el momento tienen los estudiantes; así que su uso como indicadores parece plausible. Es pertinente continuar investigando acerca del desarrollo y fortalecimiento del sentido numérico de alumnos de nivel medio superior.

Referencias

Alajmi, A. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: Teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*, 263-283.

Almeida, R. y Bruno, A. (2014). Respuestas de estudiantes de secundaria a tareas de sentido numérico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 127-136). SEIEM.

Bobis, J. (1991). Using a calculator to developing number sense. *The Arithmetic Teacher*, *38(5)*, 42-45.

Bracho-López, R., Adamuz-Povedano, N., Gallego-Espejo, M. C. y Jiménez-Fanjul, N. (2014). Alternativa metodológica para el desarrollo integral del sentido numérico en niños y niñas de primer ciclo de educación primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 167-176). SEIEM.

Fariña, M. y Bruno, A. (2021). Respuestas numéricas razonables en alumnado de secundaria. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 261-268). SEIEM.

Figueras, O., Valenzuela, C. y Martínez, M. (2021). ¿Debemos usar calculadoras en un examen? *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *92 (1)*, 45-53.

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22 (3)*, 170-218.

Lyublinskay, I. (2009). Developing number sense with technology-based science experiments: Reflections on classroom practice in primary grades and pre-service education. *Mathematics Teaching-Research Journal*, *3(2)*, 1-14.

Löwenhielm, A., Marschall, G., Sayers, J. y Amdrews, P. (2017). *Opportunities to acquire foundational number sense: A quantitative comparison of popular English and Swedish textbooks*. CERME 10.

Marshall, S. P. (1989). Retrospective paper: Number sense conference. En J. T. Sowder y B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 40-42). San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid, España.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA. NCTM.

Nguyen, V. L. (2016). *Number sense in high school mathematics students.* Trabajo de Final de Master, University of Texas.

Resnick, L. B. (1989). Defining, assessing, and teaching number sense. En J. T. Sowder y B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 35-39). San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.

Reys, R. y Yang, D. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 225-237. https://doi.org/10.2307/749900

Sanfiel, L., Perdomo-Díaz, J. y Bruno, A. (2021). Relaciones numéricas establecidas por alumnado de Primaria. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 563 - 570). SEIEM.

Secretaría de Educación Pública (2020). *Aprendizajes clave para la educación integral*. Ciudad de México, México. https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx

Sowder, J. T. (1992a). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (pp. 371-395). National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J. T. (1992b). Making sense of numbers in school mathematics. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching.* (pp. 1-51). Lawrence Erlbaum Associates.