# EL PAPEL DE LA VISUALIZACIÓN Y LA ARGUMENTACIÓN EN EL CONOCIMIENTO DE FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

## The role of visualisation and argumentation in the knowledge of prospective elementary school teachers

Giménez, J.[a], Vargas-Herrera, J.[a] y Vanegas, Y.[b]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Universitat de Lleida

**Resumen**

*La argumentación y la visualización son procesos relevantes de la actividad matemática. El objetivo de esta comunicación es describir el conocimiento matemático de un grupo de futuros maestros de educación primaria cuando se involucran en situaciones de argumentación a través de procesos visuales. Se diseña una tarea profesional e implementa con 138 futuros maestros. Se usan como herramientas de análisis la noción de configuración epistémica del enfoque onto-semiótico y los tipos de validación. Se encuentra que los futuros maestros reconocen el potencial del proceso de visualización, pero la mayoría de ellos está en un nivel de generalidad bajo, en donde priman prácticas matemáticas y procedimientos mecánicos no siendo capaces de establecer criterios de validación adecuados.*

**Palabras clave:** *argumentación, competencias profesionales, educación primaria, formación de profesores visualización.*

**Abstract**

*Argumentation and visualisation are relevant processes in mathematical activity. The aim of this paper is to describe the mathematical knowledge of a group of prospective primary school teachers when they engage in argumentation situations through visual processes. A professional task is designed and implemented with 138 prospective teachers. The notion of epistemic configuration of the onto-semiotic approach and the types of validation are used as tools of analysis. It is found that future teachers recognise the potential of the visualisation process, but most of them are at a low level of generality, where mathematical practices and mechanical procedures prevail, not being able to establish adequate validation criteria.*

**Keywords:** *argumentation, elementary education, professional competencies, teacher training, visualisation.*

## INTRODUCCIÓN

Autores como Ginsburg et al. (2005) plantean que para funcionar y enfrentar los desafíos de la sociedad actual se necesita una amplia comprensión de las matemáticas y esto implica trabajar tanto los contenidos que se deben aprender como las formas de adquisición y uso de estos contenidos. Las propuestas curriculares actuales para la educación primaria remarcan la importancia y la necesidad del desarrollo de competencias. Respecto a la competencia matemática de Castro et al. (2012) ponen

Giménez, J., Vargas, J. y Vanegas, Y. (2022). El papel de la visualización y la argumentación en el conocimiento de futuros maestros de educación primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 325-333). SEIEM.

de relieve el papel de los procesos matemáticos en su adquisición desde edades iniciales. Estos autores también señalan que procesos y competencias matemáticas enfatizan una misma idea: la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos.

En el caso de la actividad geométrica dos procesos relevantes son la visualización y la argumentación. Hershkowitz et al. (1996) recalcan la fuerte relación que tiene la visualización con muchos aspectos del currículo tanto en la educación infantil como en primaria (razonamiento deductivo/inductivo, razonamiento proporcional, formación de conceptos matemáticos, etc.). Según Fernández (2013) hay dos razones fundamentales que han orientado las investigaciones sobre visualización en las últimas décadas: la consideración de nuevos elementos y entornos de aprendizaje propios de un mundo altamente tecnológico y los cambios en la concepción de la propia naturaleza de las matemáticas, en donde la visualización es asumida como una herramienta fundamental para el reconocimiento patrones. Por otro lado, Mariotti (2006) plantea que los futuros docentes deben reconocer la importancia y dificultades en el desarrollo de la visualización y la argumentación.

En esta comunicación se pretende realizar una aproximación al conocimiento matemático inicial de futuros maestros de educación primaria (en adelante FM). Concretamente se plantean dos objetivos: a) describir aspectos de la actividad matemática desarrollada por los FM relativos a los procesos de argumentación y visualización y b) caracterizar niveles de generalización seguidos por los FM.

## MARCO TEÓRICO

El conocimiento didáctico-matemático de los profesores de matemáticas ha sido estudiado con especial interés durante las últimas décadas. Este interés ha llevado al desarrollo de modelos para el análisis y la mejora de la interacción y práctica educativa en el aula. Uno de éstos es el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas CCDM (Godino et al., 2016). En este modelo, que se propone desde el enfoque onto-semiótico (EOS), se considera que dos competencias clave que el profesor de matemáticas debe desarrollar son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Se considera que el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas implica un conocimiento profundo de la matemática y su enseñanza, es decir, un conocimiento didáctico-matemático, ya que el conocimiento meramente matemático de los objetos no es suficiente para una práctica adecuada del profesor de matemáticas (Pino-Fan et al., 2015).

Desde el modelo CCDM se plantea que para lograr una enseñanza idónea el profesor de matemáticas debe poseer distintos tipos de conocimiento. Por un lado, tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo en el que imparte la enseñanza. Además, debe conocer elementos de niveles posteriores, lo que se denomina como el "conocimiento del contenido matemático *per-se*". Este conocimiento se divide en dos tipos: *conocimiento matemático común* y *conocimiento matemático extendido*. El primero hace referencia al conocimiento sobre el objeto matemático que es necesario poner en juego para resolver problemas y/o actividades relacionadas con un tema (matemático) específico en un nivel educativo determinado. Generalmente se asocia al nivel en que se enseña. El segundo se refiere a que el docente además de saber enfrentar problemas/actividades sobre un tema determinado debe poseer conocimientos más avanzados, que hacen parte de niveles superiores.

El EOS como teoría de la cognición e instrucción matemática, ha consolidado y explicado ampliamente lo que se entiende por significado y su relación con las nociones de práctica matemática y objetos matemáticos (Godino et al., 2007; Godino, et al, 2019). Desde este enfoque se asume que las prácticas matemáticas son cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver un problema matemático, para comunicar la solución a otras personas o para validar y generalizar la solución a otros contextos y problemas. Y, que los argumentos son un objeto que ayuda a comprender el nivel de generalidad o consistencia de las visualizaciones.

Son diversos los tópicos que se han investigado vinculados al conocimiento profesional docente, pero pocos de estos trabajos analizan cómo futuros maestros de primaria reconocen la importancia de discutir sobre la validación de las ideas matemáticas basados en elementos visuales. Gutiérrez (2006) caracteriza la visualización como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos. Según Hanna y Sidoli (2007) los procesos visuales, implican el uso de elementos lógicos en los razonamientos en relación a la naturaleza de la deducción, y sugieren la existencia de conflictos semióticos debidos a la interpretación de las relaciones geométricas observadas. Desde el EOS, los procesos visuales involucran un razonamiento diagramático que se analiza mediante la configuración de objetos y procesos ostensivos y no ostensivos (Godino et al., 2016). El razonamiento diagramático según Bakker y Hoffmann (2005) implica tres pasos: construir un diagrama mediante un sistema de representación; experimentar con el diagrama y observar los efectos, reflexionando sobre ellos.

La validación es un proceso en el que se utilizan recursos de tipo técnicos, teóricos, disciplinares y argumentativos -por parte del que aprende-para garantizar la validez de un resultado formulado. La validación, como la actividad tendiente a justificar la eficacia o corrección de un procedimiento o un resultado, o a justificar el carácter de verdadero de una propiedad. Autores como Richard (2004) resaltan que son diversas las relaciones entre visualización, argumentación y prueba. Resulta importante por tanto analizar cómo justifican determinadas situaciones los FM basados en representaciones gráficas. Así como determinar el nivel de generalidad de dichas justificaciones.

Manouchehri y Sriraman (2015) señalan que la generalización se puede dividir en dos categorías principales, empírica y teórica. En la generalización empírica, el proceso básico consiste en detectar una característica o propiedad común a dos o más objetos o situaciones basándose en la percepción y luego definir esas características como generalmente presentes en todos los objetos o situaciones respectivas. Según Haj-Yahya y Herskovitz (2013) la generalidad se expresa con mayor o menor sofisticación según el grado de contracción de los medios semióticos utilizados. En el presente estudio se usan las categorías de Balacheff (1987) sobre tipos de validación: *empirismo ingenuo*, *ejemplo crucial* y *ejemplo genérico* para diferenciar los niveles de generalización que alcanzan los FM cuando se involucran en procesos de razonamiento y análisis de validación de ciertas relaciones. La primera de estas categorías refiere a la situación en la que el estudiante considera algunos pocos casos particulares, los cuales le son suficientes para validar una proposición. En la segunda, el estudiante pretende verificar una propiedad, permitiendo antever algún tipo de generalización. Finalmente, el ejemplo genérico indica una situación que consiste en dejar claras las razones que validan una propiedad.

## METODOLOGÍA

Se sigue una metodología mixta (Cohen et al., 2007), en donde se realiza un análisis de contenido sobre cómo los FM desarrollan procesos de argumentación y visualización. Se diseña e implementa una tarea profesional con un total de 18 grupos de FM (108 estudiantes) de segundo curso del Grado de Educación Primaria de una universidad española. Cabe señalar que consideramos que las producciones grupales son representativas del conocimiento matemático de los FM dado que emergen de la discusión y acuerdos de todos los miembros. La tarea profesional enfrenta a los FM a tres situaciones de demostración visual, de las cuales sólo se analizará en esta comunicación la primera de ellas. En esta situación se pide justificar mediante registros visuales que el área de un triángulo se puede expresar como el producto de la base por la mitad de su altura. En la tabla 1, se muestran las preguntas planteadas a los FM según los tipos de conocimiento planteados por el CCDM.

Tabla 1. Preguntas, tipo de conocimiento involucrado e intencionalidad.

| Preguntas | Conocimiento | Intencionalidad |
|---|---|---|
| 1. En una cuadrícula dibuja un triángulo rectángulo de 7 cm de base y 6 cm de altura. Comprueba que el área hace 21 cm$^2$. | Común | Identificar conocimiento o dificultades sobre cómo determinar el área de un triángulo. |
| 2. Dibujando, recortando, componiendo y descomponiendo, muestra ahora que, si tienes un triángulo cualquiera, su área es igual a multiplicar la base por la mitad de la altura. | Común<br>Extendido | Identificar conocimiento sobre la relación b x (h/2).<br>Distinguir lo particular de lo general<br>Promover el análisis sobre la validez de una relación. |
| 3. ¿Por qué decimos que en la actividad del ítem 1 estamos haciendo una comprobación y en el ítem 2 una demostración visual? | Extendido | Diferenciar entre comprobación y validación (mediante demostración visual) |

Para identificar aspectos del conocimiento matemático de los FM se usan herramientas de análisis planteadas por el EOS. Inicialmente se realiza la configuración epistémica de la situación planteada (ver tabla 2).

Tabla 2. Prácticas y objetos encontrados en la tarea.

| Situación Problema | |
|---|---|
| Determinar que el área de cualquier triángulo se puede obtener como producto de la medida de su base por la mitad de su altura. Hacerlo mediante demostración visual | |
| **Prácticas Matemáticas** | |
| P1: Dibujar un triángulo rectángulo con medidas específicas.<br>P2: Dibujar, recortar, componer y descomponer triángulos con papel o en formato digital.<br>P3: Determinar área de un triángulo rectángulo a partir una cuadrícula.<br>P4: Determinar área como relación entre la base del triángulo y la mitad de la longitud de su altura correspondiente.<br>P5: Comprobar de forma algebraica, aritmética y visual relaciones entre los lados de un triángulo y su área.<br>P6: Comprobar la relación b x h/2 determina el área para un caso particular de triángulo (rectángulo).<br>P7: Comprobar que la relación b x h/2 determina el área de cualquier tipo de triángulo.<br>P8: Diferenciar entre una comprobación y una demostración visual: identificar la comprobación como la validez en algunos casos particulares; demostración como argumentación que valida de forma general para todos los casos posibles. | |
| **Lenguaje** | **Definiciones -conceptos** |
| *Verbal* L1: Triángulo. L2: Triángulo Rectángulo. L3: Triángulo acutángulo. L4: Triángulo obtusángulo. L5: Triángulo Isósceles. L6: Triángulo escaleno. L7: Cuadrícula. L8: Conteo. L9: Dobleces, L10: Composición. L11: Comprobación. L12: Demostración. L13: Validación. L14: Cálculo. L15: Área. L16: Mitad. L17: Cuantificadores. L18: Independencia de la posición. L19: Fórmula. L20: Figura. L21: Gráfico. L22: Rectángulo.<br><br>*Gráfico* G1. Uso de cuadriculas, G2 gráfico de triángulos en cuadriculas | D1 Elementos de un triángulo (altura, base)<br>D2 Tipos de triángulos<br>D3 Área de un triángulo<br>D4 Generalización de una propiedad<br>D5 Equivalencia. |

| **Procedimientos** |
| --- |
| PR1: Dibujar un triángulo rectángulo. |
| PR2: Construir cuadriculas para contar cantidad de cuadrados unitarios interiores al triángulo. |
| PR3: Utilizar material tangible para proponer relaciones entre la altura y la base de un triángulo cualquiera. |
| PR4: Explicación de la diferencia entre comprobación y demostración. |
| PR5: Justificación del uso de material tangible para la presentación de ideas geométricas en estudiantes de educación primaria. |
| PR6: Justificación mediante el uso de un triángulo escaleno, (considerado como genérico). |
| PR7: Interpretación de la prueba visual como demostración por pasos dado su nivel de generalización respecto las posiciones, las medidas y los diferentes tipos de triángulos. |
| **Proposiciones (implícitas o no)** |
| PO1: El área de un triángulo se puede calcular mediante el conteo de los cuadrados unitarios que están en su interior. |
| PO2: El conteo de cuadrados unitarios puede hacerse mediante la descomposición de figuras en triángulos más pequeños que a su vez, componen cuadrados a contar. |
| PO3: El producto de la longitud de la base de un triángulo por la mitad de la longitud de su altura corresponde al área. |
| PO4: El área de cualquier triángulo es el resultado de multiplicar la longitud de una de sus bases por la mitad de la longitud de su correspondiente altura. (Y eso es equivalente a la expresión clásica de base x altura dividido por dos). |
| PO5: El uso de varios ejemplos relativos a alguna propiedad geométrica NO permite generalizar la misma y admitirla como “demostración”. |
| PO6: Para cualquier triángulo es posible componer un rectángulo, haciendo uso de un triángulo congruente (haciendo el doble) de tal forma que se construya un rectángulo |
| **Argumentos (explícitos o no)** |
| A1: Uso de material tangible para hacer un conteo, en un caso determinado. |
| A2: Justifico el área de un triángulo determinado a través de conteo de cuadrados internos en una situación específica. (Si tengo una cuadrícula, puedo determinar el área del triángulo mediante reagrupaciones en el conteo interno). |
| A3: Comprobación aritmética de la relación del área de un triángulo determinado (El área del triángulo da 21 porque lo verifiqué en la fórmula). |
| A4: Argumenta que la verificación de uno o varios ejemplos de tipos de triángulo sobre el cálculo del área no permite generalizar la propiedad para cualquier triángulo. |
| A5: Puedo justificar el área de un triángulo rectángulo determinado (mediante equivalencia de áreas o composición/descomposición) como la mitad de un rectángulo, con la misma base y altura. |
| A6: Puedo justificar el área de un triángulo rectángulo cualquiera (mediante equivalencia de áreas o composición/descomposición) como la mitad de un paralelogramo, con la misma base y altura. Posteriormente justifica que la mitad del paralelogramo, puede obtenerse, como un paralelogramo que tenga la misma base, y la mitad de la altura. |
| A7: Puedo justificar el área de cualquier triángulo mediante descomposición y composición, quitando el triángulo superior (hasta la paralela media) y añadiendo al otro lado, para hacer un paralelogramo equivalente. |

Posteriormente tomando como base la configuración epistémica (tabla 2) se analizan las producciones de los 18 grupos de FM, identificando las prácticas matemáticas, lenguajes, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos evidenciados en las producciones de los FM. En la tabla 3, se muestra a manera de ejemplo, la sistematización realizada de la configuración epistémica de uno de los grupos.

Tabla 3. Configuración epistémica del grupo 10.

| Grupo | Práctica Matemática | Lenguaje | | Definiciones | Procedimientos | Proposiciones | Argumentos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P1 | V1 | V15 | D1 | PR1 | PO1 | A2 |
| | P3 | V2 | V16 | D2 | PR2 | PO2 | A3 |
| G10 | P4 | V7 | V19 | | PR5 | PO4 | A5 |
| | P5 | V8 | L22 | | | | |
| | P6 | V10 | G1 | | | | |
| | | | G2 | | | | |

Para reconocer el nivel de generalidad alcanzado por los FM, observamos las formas visuales propuestas y sus descripciones correspondientes. En la figura 1 se muestran ejemplos de respuestas asociadas a los tres niveles de generalidad considerados. En el nivel más bajo relacionado con el empirismo ingenuo (N1) se consideran justificaciones que se centran en el conteo para el caso particular, y el uso de la fórmula en el caso general. En el nivel de grado intermedio (N2) se consideran justificaciones en las que se toma un triángulo no rectángulo, que se duplica, para conseguir un paralelogramo. Posteriormente se busca un rectángulo equivalente, que no es el que corresponde con el producto pedido, sino el que muestra que el área del triángulo es el producto de la base por la altura y luego hacer la mitad. En un nivel alto, se sitúan las propuestas que consideran un cierto nivel de generalidad y que no centran su explicación en simples comprobaciones, como el caso del grupo G12, que argumenta: "*Hemos hecho una demostración visual porque el objetivo era que, mediante estrategias visuales y prácticas, se entendieran y demostraran evidencias lógicas, dando sentido o significando un hecho o teorema matemático. De esta manera la demostración tiene un valor más empírico ya que sirve como una verificación de una hipótesis…*"

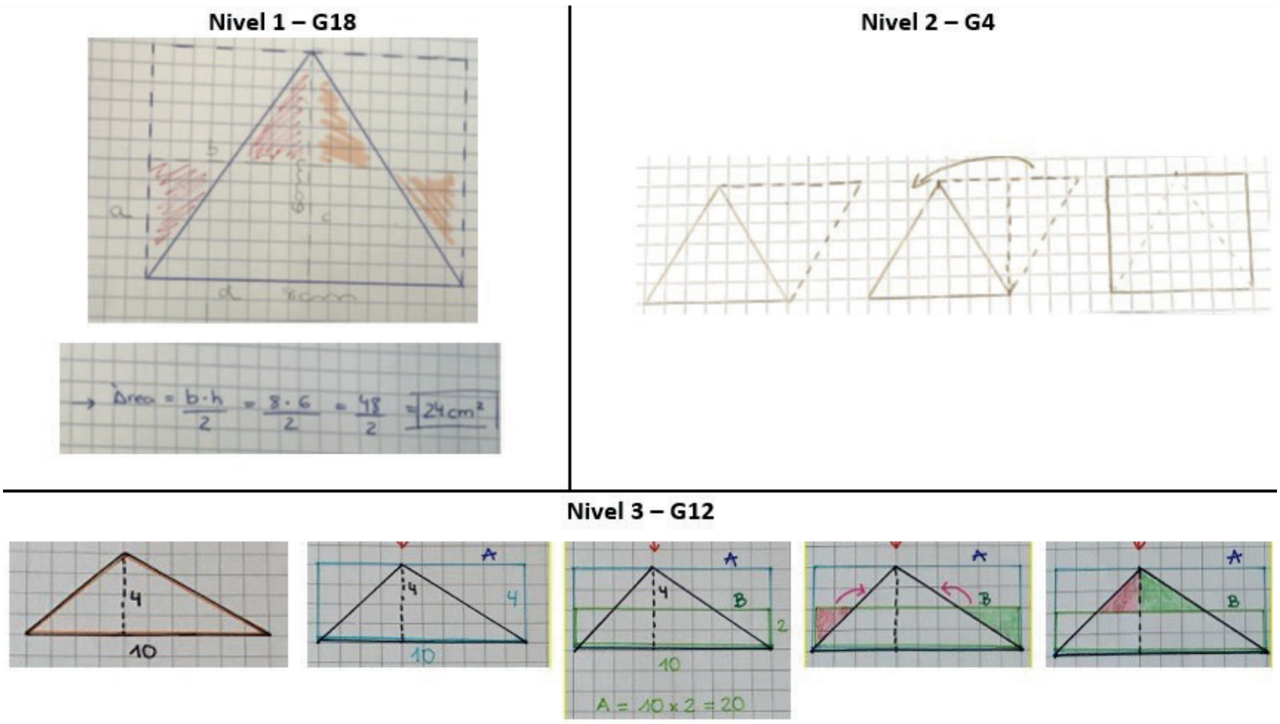


Figura 1. Ejemplos de respuesta para los niveles de generalidad.

## RESULTADOS

Los resultados se organizan en dos partes. En la primera se describen aspectos relevantes de la actividad matemática desarrollada a partir de los diferentes elementos de la configuración epistémica. En la segunda se presentan los niveles de generalización conseguidos por los FM. Se refiere en todos los resultados a elementos observados porcentual y descriptivamente respecto de la cantidad total de grupos de FM (18) participantes en este estudio.

En cuanto a las *prácticas matemáticas*, se observa que los FM mayoritariamente desarrollan prácticas referidas a la situación con medidas determinadas (P1, P2, P3 y P5). Su actividad matemática se basada en seguir instrucciones y realizar procedimientos como contar y comprobar de forma aritmética que se cumple alguna propiedad, en este caso, el área del triángulo.

En relación a *los procedimientos* el 88.9% utilizan PR1 y PR2. Estos procedimientos se centran en el dibujo de triángulos en cuadriculas para obtener su área mediante conteo. El *concepto* más utilizado es el D1, relativo a los elementos de un triángulo como su altura y su base. Finalmente, las proposiciones que más aparecen son la PO1 (77,8%) y la PO2 (72,2%).

En cuanto al *lenguaje verbal o gráfico,* se constata el uso de las formas prototípicas y la alusión a términos *triángulo* (94,4%), *triángulo rectángulo* (83,3%), *rectángulo* (72,2%) *área* (100%) *cuadrícula* (88,9%) y *conteo* (83,3%). Sólo el grupo G12 justifica considerando distintos tipos de triángulos, y habla de "siempre" como expresión de los *cuantificadores*. En dos grupos más se muestran representaciones gráficas que buscan "alejarse" del triángulo rectángulo, pero no se explici*ta la generalidad.*

El 55,6% de los grupos, usan *argumentos* como A1, A2, A3 y A5 (referidos al conteo, la comprobación aritmética del área y la justificación de área como equivalencia con la mitad de un rectángulo) para justificar cómo obtener el área del triángulo rectángulo. En otros casos, se muestra como mitad de un paralelogramo, que luego se ve como equivalente a un rectángulo (27,7%). En estos grupos se sigue estrictamente la fórmula del área del triángulo como base por altura sobre dos y no se encuentra evidencia de que se entienda la fórmula como la longitud de la base por la mitad de la longitud de la altura. Cuatro grupos (22,2%) proponen procedimientos generalizables, con argumentos como A6 y A7, para validar sus explicaciones, aunque sea de forma implícita. Uno de estos grupos (G12) justifica su respuesta usando además el argumento A4. El grupo G14 usa un triángulo isósceles y el G16 usa dos casos (triángulo rectángulo isósceles y no isósceles). Estos grupos establecen equivalencias generales mediante descomposición y composición. El grupo G4 afirma que la simple verificación de uno o más ejemplos para el cálculo de área no permite generalizar la relación.

En cuanto a la validación, se constata que el 83,3% de los grupos realizan justificaciones que se sitúan en el *empirismo ingenuo* en el sentido de Balacheff (1987). Estos grupos sustentan la validez de sus respuestas en la verificación de la relación en algunos casos con medidas particulares o bien no llegan a justificar la relación. Y se basan en la comprobación aritmética. Se asigna a estos grupos en el N1 de generalización. Un 11,2% de los grupos propone justificaciones que podemos asimilar a la noción de *experiencia crucial*. Estos grupos situados en el N2 de generalidad, verifican sus proposiciones en un caso o dos, asumiendo que, si la relación se cumple en dicho caso, funcionará siempre. Estos grupos (G4, G14 y G16) se separan del ejemplo inicial (triángulo rectángulo) y hacen comprobaciones en otro tipo de triángulos (ver figura 2). Finalmente, se encuentra que sólo un grupo (G12) es asignado al N3 de generalización. Este grupo realiza un proceso de validación que puede considerarse como *ejemplo genérico* (Balacheff, 1987) En efecto, este grupo selecciona un caso "genérico" (triángulo obtusángulo escaleno) y explica sus razones mostrando diversas transformaciones para justificar la validez de la relación: el área de un triángulo equivale a multiplicar la base por la mitad de su altura (figura 1). El grupo G12, es el único que consigue visualizar el área del triángulo como producto de la base por la mitad de la altura, estableciendo paso a paso una descomposición y composición en el caso de un triángulo escaleno como ejemplo genérico.

## CONSIDERACIONES FINALES

El análisis realizado (elementos de la configuración epistémica- tipos de validación) han permitido caracterizar el conocimiento matemático de los futuros maestros, particularmente los procesos de validación. Se ha observado que las prácticas, argumentos y estrategias visuales puestas en acción por los futuros maestros mayoritariamente son las correspondientes a un empirismo ingenuo. Un único grupo supera la simple comprobación empírica como forma de validación. Balacheff (1987) indica que la expresión de una experiencia mental, refiriendo a la última categoría de su clasificación (ejemplo genérico) requiere construcciones cognitivas y lingüísticas complejas. Quizás eso explica que en nuestro estudio ningún grupo se ubica en dicha categoría. Se constata un conocimiento débil de los futuros maestros respecto la demostración, así como la complejidad onto-semiótica al relacionar los procesos de argumentación, visualización y prueba (Fernández, 2013; Haj-Yahya, y Hershkowitz, 2013). Se reconoce la limitación de la mirada sobre el trabajo en grupo en cuanto no ha permitido reportar resultados individualizados. Se espera seguir profundizando en el tema del uso de procesos visuales, analizando su significado, para brindar oportunidades de aprendizaje a los futuros maestros de manera que consideren estos procesos como una herramienta poderosa para estudiar la validez de las afirmaciones matemáticas y la necesidad de involucrar a los niños en estos estudios desde la educación primaria.

### Agradecimientos

Este estudio se ha desarrollado en el marco de los proyectos PID2019- 104964GB-I00 (MICINN) / PID2021-127104NB-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE)/ 2017-SGR-101 y 2017-SGR-1353.

### Referencias

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Bakker, A. y Hoffmann, M. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 333-358. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5536-8

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203029053

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M. L., Martínez, S. y Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the learning of Mathematics, 39*(1), 38- 43.

Ginsburg, A., Leinwand, S., Anstrom, T. y Pollock, E., (2005). *What the United States can learn from Singapore's world-class mathematics system (and what Singapore can learn from the United States): An Exploratory Study*. American Institutes for Research.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. De la Fuente. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Hanna, G. y Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives, *ZDM Mathematics Education, 39*, 73-78. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0005-0

Haj-Yahya, A. y Hershkowitz, R. (2013). When visual and verbal representations meet-The case of geometrical figures. En A.M. Lindmeier, A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 409-416).

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* (pp. 161-204). Springer https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_6

Manouchehri, A. y Sriraman, B. (2015). Mathematical Cognition: In Secondary Years (13-18). En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 505-520). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100015

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Sense Publishers.

Pino-Fan, L. Assis, A. y Castro, W. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*, 1429-1456. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

Richard, P. (2004). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques.* Serge Lang.