

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE SOBRE ISOMETRÍAS EN UNA DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO CON GEOGEBRA

Oportunities to learn isometries in a whole discussion with GeoGebra

Martín-Nieto, M.^a y Ruiz-López, N.^b

^aCES Don Bosco, ^bUniversidad Autónoma de Madrid

Resumen

Este es un estudio de perspectiva discursiva e instrumental, en el que se analizan las oportunidades de aprendizaje generadas en una discusión en gran grupo con el uso de GeoGebra. Se aplican métodos cualitativos e interpretativos para el estudio de datos de clase en el Grado de Magisterio de Educación Primaria. Los alumnos resuelven un problema de contenido geométrico relacionado con isometrías. Los datos se analizan a partir de un documento entregado por parejas y de videograbaciones. La discusión se divide en episodios que se clasifican según el tipo de orquestación y según la naturaleza de sus acciones. El Software de Geometría Dinámica crea un entorno formal para abordar las isometrías y el diálogo resulta esencial para la generalización de resultados.

Palabras clave: *discusión en gran grupo, investigación de diseño, isometrías, magisterio, oportunidad de aprendizaje.*

Abstract

This paper, which is a discursive and instrumental perspective study, analyzes the opportunities to learn that are generated in a whole group discussion with the use of GeoGebra. The method has been qualitative and interpretative. Future primary teachers who are studying at university solve a problem related with isometries and the data is analyzed from a document delivered in pairs and from video recordings. The discussion is divided into episodes that are classified according to the type of orchestration and to the nature of their actions. Dynamic Geometry Software generates a formal environment to deal with isometries and the dialogue is essential for the generalization of results.

Keywords: *big group discussion, design research, isometries, primary teachers, opportunities to learn.*

INTRODUCCIÓN

El estudio de las oportunidades de aprendizaje matemático es una herramienta crucial para planificar y gestionar secuencias didácticas efectivas. Por ello, la investigación en didáctica de las matemáticas experimenta una fuerte preocupación en este sentido (Planas y Boukafri, 2019).

Este trabajo surge dentro de un proyecto de tesis doctoral en el que utilizamos métodos cualitativos e interpretativos aplicados al análisis de datos de clase, en el grado de Magisterio de Educación Primaria. Se trata de una contribución al estudio de la enseñanza y el aprendizaje de los movimientos rígidos en el plano a partir de discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología. Para este estudio, se ha diseñado una secuencia didáctica formada por cuatro problemas, tres de ellos de contenido matemático

^{a b} Martín-Nieto, M. y Ruiz-López, N. (2022). Oportunidades de aprendizaje sobre isometrías en una discusión en gran grupo con GeoGebra. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 383-390). SEIEM.

y el último de corte didáctico. En este artículo exponemos la clasificación en episodios de la discusión en gran grupo sobre el primer problema.

La comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas está interesada en el desarrollo del conocimiento profesional en los estudios de Magisterio en el área de geometría, en la que se vienen detectando ciertas carencias (Ruiz-López y Sáenz de Castro, 2013). La mayoría de los estudios abarcan distintas problemáticas en torno a la adquisición de conocimientos geométricos (Bustos Rubilar y Zubieta Badillo, 2019), así como la influencia que pueden desempeñar las creencias y concepciones de los profesores sobre el aprendizaje de los alumnos (Giacomone et al., 2018). Podemos encontrar numerosas investigaciones dentro del grupo de trabajo *Aprendizaje de la Geometría* de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). El análisis de las oportunidades de aprendizaje, desde las perspectivas discursiva e instrumental, en un contexto de formación de maestros de Educación Primaria es clave por el elevado interés que suscita en el momento actual.

El propósito general del diseño formativo es responder a la pregunta “¿Cómo se pueden potenciar las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías en futuros maestros de primaria, mediante la orquestación de discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología?”. Para aproximar respuestas a la pregunta de investigación se plantean los siguientes objetivos fundamentales:

- Estudiar la anticipación, puesta en práctica y evaluación de una secuencia didáctica con discusiones en gran grupo utilizando la herramienta GeoGebra.
- Detectar oportunidades de aprendizaje de contenidos relacionados con movimientos rígidos en el plano en el contexto de la secuencia didáctica.

MARCO TEÓRICO

El aprendizaje matemático generalmente se produce cuando hay evidencias explícitas del aprovechamiento de alguna oportunidad de aprendizaje matemático (Morera, 2013). Luego, pocos temas de la práctica educativa dentro del aula de matemáticas afectan tan directamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje como la generación de oportunidades de aprendizaje matemático.

Según Cobb y Whitenack (1996) el aprendizaje matemático es un proceso de auto organización conceptual y de enculturación. Morera (2013) añade la modificación de estructuras procedimentales, de gestión del conocimiento y de participación en el entorno de enseñanza-aprendizaje. Así, consideramos *oportunidades de aprendizaje* todas las situaciones que se dan durante un proceso de resolución de un problema en las que se presenta la posibilidad de que los alumnos puedan construir nuevas conexiones o relacionarlas con el aprendizaje de nuevas formas de proceder. Se trata de situaciones donde el contraste entre diferentes interpretaciones de la resolución o de las normas de clase es aprovechado como hilo conductor en la discusión. La relación entre obstáculos y oportunidades de aprendizaje está presente en la base de experimentos de enseñanza que hacen aflorar interpretaciones diversas de normas socio matemáticas (Planas y Boukafri, 2019).

Morera et al. (2013) caracterizan las oportunidades de aprendizaje en tres tipos, según la orientación de sus acciones. El primer tipo son las orientadas a conocer un contenido matemático concreto, por ejemplo, identificar un vector de traslación. Otro tipo son las oportunidades orientadas al aprendizaje de una estrategia, por ejemplo, aprender a recurrir a casos particulares. Por último tenemos oportunidades orientadas a actividades de autorregulación, por ejemplo, aprender la necesidad de justificar mediante argumentos.

Según Bustos Rubilar y Zubieta Badillo (2019), el hecho de que los estudiantes tengan la oportunidad de intercambiar ideas o puntos de vista ayuda, no solo a mejorar sus validaciones, sino también

a conocer el significado de justificar en el contexto de las matemáticas. El análisis de interacciones en clase puede utilizarse para detectar oportunidades de aprendizaje y continuidades en la participación (Planas y Boukafri, 2019). La matemática escolar se construye en la actividad diaria en el aula y debe respetar la manera en la que el alumno se expresa. Esto abre la posibilidad de generar oportunidades de aprender interpretaciones significativas.

Entendemos por *orquestración* la manera que tiene un profesor de gestionar cada uno de los elementos de una discusión (Morera, 2013). En nuestro caso estos elementos son los alumnos, el Software de Geometría Dinámica (SGD) y la propia profesora. Todos deben interactuar para conseguir una producción común. Según Drijvers et al. (2010) los tipos de orquestración presentes en estas discusiones son:

- Demostración técnica: Exposición por parte del profesor de elementos técnicos de la herramienta.
- Explicación de la pantalla: Esclarecimiento de lo que sucede en la pantalla por parte del profesor.
- Conexión pantalla-pizarra: El profesor establece la relación entre lo que ocurre en el entorno dinámico y su representación en un entorno estático.
- Discusión de la pantalla: Diálogo en gran grupo sobre lo que ocurre en la pantalla.
- Descubrir y mostrar: Utilización deliberada del trabajo realizado por un estudiante, identificado durante la preparación de la discusión.
- Trabajo del sherpa: La tecnología es utilizada por uno o varios alumnos para presentar su trabajo delante del resto o para responder preguntas planteadas por el profesor.

En el análisis de los datos del estudio utilizaremos los siguientes estadios propuestos por Morera (2013), que aprecia modelos de actuación potencialmente interesantes para la discusión en gran grupo: situación del problema, presentación de una solución (argumentada), estudio de las diferentes estrategias, estudio de casos particulares o extremos, contraste entre diferentes soluciones, conexión con otras situaciones, generalización y contextualización, reflexión sobre el progreso matemático.

En relación al esquema que adoptan algunas de las discusiones en gran grupo, Morera (2013) detecta que cuando la orquestración se centra en el profesor los estadios suceden de manera más ordenada que cuando se centra en los alumnos. Además, si un problema trata un gran número de estadios es probable que sea fecundo en oportunidades de aprendizaje. Para que se traten todos los estadios, una buena anticipación del problema es fundamental; aunque pueden influir otros factores como la dinámica de participación de los alumnos. Igualmente, la tecnología puede ocasionar que un ejercicio se transforme en problema, así puede influir en su riqueza (Hershkowitz y Schwarz, 1999).

METODOLOGÍA

La metodología de la investigación es cualitativa. A grandes rasgos, nuestra investigación se encuentra dentro del paradigma denominado “investigación de diseño” (“design research”) con métodos interpretativos aplicados al análisis de datos de clase (Molina, 2021). Así, hemos planificado secuencias formativas que implican el diseño de tareas, su implementación efectiva y el análisis retrospectivo de la experiencia. Tras cada implementación, hemos realizado un proceso de reflexión iterativa que ha permitido re-adaptar el diseño inicial. (Cobb, Jackson y Dumlap, 2016).

Los participantes son los 21 estudiantes de 4º curso de Grado de Magisterio de Educación Primaria (modalidad bilingüe) del Centro de Estudios CES Don Bosco (Adscrito a la Universidad Complutense

de Madrid), dentro de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III. La profesora que dirige el taller es a su vez la investigadora. Además, tiene relación con los participantes en el estudio, ya que es la profesora de la asignatura. La información se obtiene a partir del análisis de las actividades de GeoGebra entregadas por cada pareja a través del campus virtual y de videograbaciones de las discusiones en grupo realizadas en las sesiones de clase.

La secuencia didáctica está formada por cuatro problemas, los tres primeros sobre contenidos relacionados con movimientos rígidos en el plano y el último de corte didáctico, ya que un problema importante en educación matemática consiste en dilucidar qué tipo de conocimiento didáctico-matemático debería tener un profesor de matemáticas (Giacomone et al., 2018). En esta comunicación exponemos la caracterización de los episodios que se suceden durante la discusión en gran grupo del problema 1: Una empresa ha diseñado un juego para niños que permite armar figuras como el dibujo siguiente (figura 1).



Figura 1. Problema 1.

Construye la figura anterior, aplicando un giro, una traslación, una simetría y una simetría deslizante a las piezas siguientes, según corresponda (figura 2).

Señala en cada pieza, mediante un cuadro de texto, el nombre del movimiento que has aplicado y su(s) elemento(s).

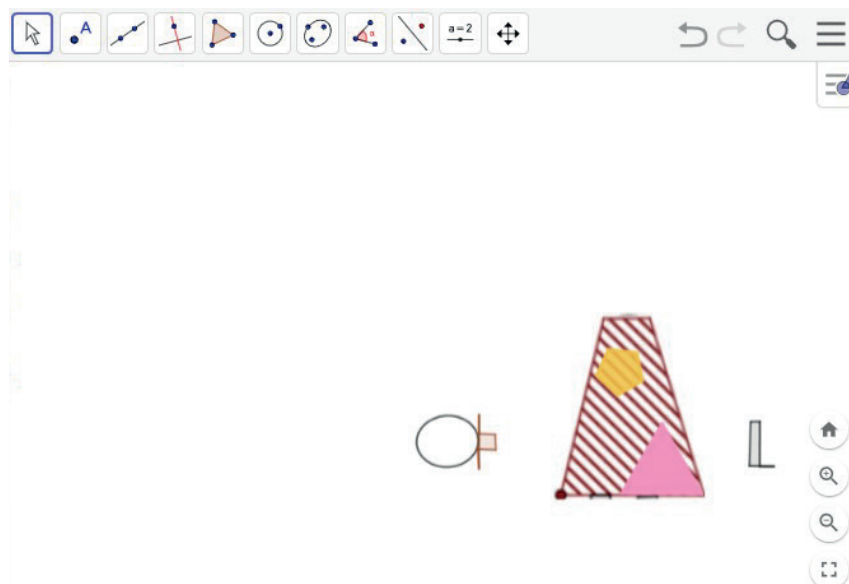


Figura 2. Imagen del SGD.

La aplicación de esta actividad se llevó a cabo en dos sesiones. En la primera, los estudiantes trabajaron en parejas, que formaron por afinidades personales, en el aula de informática con el uso del

SGD GeoGebra. En la segunda, tuvo lugar la discusión en gran grupo en el aula-clase que dispone de Pizarra digital interactiva (PDI), donde se proyecta la solución de una pareja que realiza el *trabajo del sherpa* (Drijvers et al., 2010).

Para el análisis de los resultados nos centramos en los elementos que pueden influir en el aprendizaje de los estudiantes y dividimos la discusión en gran grupo en episodios, fijándonos en la interacción entre los participantes y en la influencia de la tecnología. Todas las acciones pertenecerán a un episodio y serán analizadas. La naturaleza de los episodios está caracterizada por dos elementos: tipos de orquestación (Drijvers et al., 2010) y estadios de la discusión (Morera, 2013). Estudiamos los segmentos mirando solo una dimensión, luego repetimos el procedimiento mirando la otra dimensión. Así, los episodios estarán caracterizados por elementos de cada componente.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El problema 1 tiene dos apartados con cierto paralelismo. El objetivo del primer apartado es trabajar la elección y la construcción de movimientos rígidos con la excusa de formar una figura geométrica. En el segundo apartado se pide identificar con su nombre a cada uno de los elementos construidos. Para el análisis, ponemos atención a los diálogos que tuvieron lugar durante la discusión en gran grupo.

Dividimos las acciones en diez episodios como se muestra en la tabla 1. Los episodios van acompañados de un subíndice, que conserva el orden cronológico en el que se sucedieron.

Tabla 1. Clasificación de los episodios del Problema 1.

DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO		Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de las estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	(Tipos de estadio)
Demostración técnica							e ₁₀		e ₇	
Explicación de la pantalla	e ₁									
Conexión pantalla-pizarra							e ₆			
Discusión de la pantalla		e ₂	e ₂	e ₈			e ₃ , e ₉	e ₅ , e ₈		
Descubrir y mostrar		e ₃				e ₃				
Trabajo del Sherpa				e ₄						
(Tipos de orquestación)										

Los estadios en los que la acción se centra en la orquestación de la profesora se sitúan en las tres primeras líneas de la tabla 1. Es ella quién, explicando en pantalla, sitúa los alumnos para empezar la discusión conjunta después del trabajo en parejas en el aula de informática en la sesión anterior (e_1). A continuación, invita a Cristina y Radhika a exponer su solución. Para colocar una de las piezas han aplicado un giro con un ángulo determinado, pero tenían total libertad para elegir el centro de giro. En el segundo episodio surge una discusión sobre la amplitud del ángulo de giro. La profesora y Cristina concluyen que es importante indicar el sentido de giro cuando se hace referencia a la amplitud del ángulo (e_2). En la tabla 1, este episodio se ha considerado *discusión en pantalla* ya que tiene lugar una discusión conjunta sobre lo que ocurre en el SGD. Cristina comienza presentando una solución y después se estudian distintas estrategias para argumentar.

En el siguiente episodio (e_3) Radhika continúa contando cómo han construido la figura que se pedía. Han aplicado a otra pieza una simetría axial. La clase se hace consciente de que no existe libertad para colocar el eje de simetría, pues depende de dónde se haya colocado el centro de giro de la pieza anterior. Se revisa la noción de simetría, el elemento fundamental es el eje e invierte la orientación. Este episodio se ha clasificado en la tipología *descubrir y mostrar*, pues Radhika expone una solución que se utiliza deliberadamente para discutir sobre la libertad de elección del eje. Se conecta con otras situaciones en las que la pieza podría haber sido la primera en moverse, por lo que existiría libertad total de colocación del eje. También se podrían haber realizado previamente otros movimientos que condicionaran a colocar el eje en otra posición.

Cristina explica que han aplicado una simetría deslizante a otra pieza (e_4). Esto da la oportunidad de revisar la definición de este movimiento. Poniendo en común otras soluciones, los alumnos tienen la oportunidad de aprender qué puede surgir de la composición de simetría y traslación o traslación y simetría. La profesora dice que los movimientos no son conmutativos (volverá sobre ello en el episodio 10). En este episodio, se concluye que no existe una única solución y se hace necesario expresarse con el lenguaje matemático adecuado. Lo clasificamos como *trabajo del sherpa* porque Cristina utiliza la tecnología para presentar su trabajo al resto de los participantes y responder las dudas de la profesora. Además, se estudian diferentes estrategias para resolver o argumentar.

En el episodio 5 (e_5) se recuerda el nombre del “centro de giro” y se recalca la importancia de diferenciar entre recta y segmento. Es fundamental saber cuáles son las características del vector: módulo, dirección y sentido. Utilizando el carácter dinámico del software, Cristina y Radhika son conscientes de que han representado dos veces el mismo vector cuando no habían tenido intención de que fuera así durante la elaboración de la actividad en el aula de informática. De nuevo, se hace esencial expresarse con el lenguaje matemático adecuado. Este episodio es una discusión conjunta sobre lo que está ocurriendo en la pantalla que genera un ambiente idóneo para la generalización de un resultado encontrado.

Cristina y Radhika vuelven a sentarse en sus sitios en clase. En el episodio 6 (e_6) tiene lugar *conexión pantalla-pizarra* ya que la profesora utiliza una pizarra tradicional para anotar los resultados obtenidos en el entorno dinámico. Entre todos, recuerdan que los únicos movimientos rígidos posibles en el plano son traslación, giro, simetría o simetría deslizante. Debido a esto, la composición de movimientos cualesquiera en el plano originará uno de los cuatro. Varias alumnas plantean dudas y se pone de manifiesto la necesidad de justificar las propiedades que se enuncian. En este episodio se conecta con conocimientos matemáticos que aún se tienen que introducir.

La profesora, en el episodio 7 (e_7) vuelve a recordar la noción de simetría deslizante que ya había aparecido en el episodio 4. Es una *demonstración técnica* que sirve como balance de la puesta en común para que los alumnos reflexionen sobre aspectos matemáticos trabajados.

Se estudia un caso particular de composición de simetría y traslación en el episodio 8 (e_8): Cuando el eje de simetría y el vector de traslación son perpendiculares. En ese caso, la composición origina una nueva simetría. La discusión que la profesora provoca permite recordar las características de una simetría. Los alumnos afirman que les resulta visualmente más sencillo si se sitúa el eje de simetría en posición vertical y una alumna es capaz de auto-corriger un argumento equivocado. Este episodio se considera una *discusión en pantalla* que permite la generalización y conceptualización.

El episodio 9 (e_9) vuelve a ser una *discusión en pantalla*. En este caso se produce la conexión con otros conceptos matemáticos. Cuando la composición de una simetría y una traslación es una nueva simetría, el nuevo eje de simetría es paralelo al inicial. La profesora argumenta este hecho empíricamente, utilizando el arrastre. Cristina no se conforma con esta evidencia, pregunta dudas y así, ejemplifica, haciendo patente la importancia de preguntar dudas.

En el último episodio (e_{10}) se comprueba algo que ya se había enunciado en el episodio 4: la composición de una simetría y una traslación no es conmutativa, aunque genere un movimiento rígido con el mismo nombre. Para ello, la profesora vuelve a utilizar el arrastre. Es una *demonstración técnica* en la que se conecta con conocimientos matemáticos previos.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Según Morera (2013) la buena anticipación del problema está relacionada con el número de estadios que se tratan y esto influye en que podamos considerar que el problema sea rico. Se puede comprobar, observando la tabla 1, que en este caso están presentes todos los estadios.

Asumiendo la complejidad de analizar todos los factores que influyen en la riqueza de un problema, consideramos que las dos características fundamentales del diseño experimental de esta investigación son claves: el entorno tecnológico y el entorno colaborativo. Por un lado, el SGD crea un contexto formal para abordar las isometrías. En diferentes episodios, la tecnología ha permitido justificar empíricamente, mediante la modificación de los elementos que intervenían en el problema. Por ejemplo, si imaginamos el mismo problema en un entorno tradicional de lápiz y papel, el sentido de comparar vectores (e_5) se pierde si no se tienen conocimientos de geometría analítica, ya que se compararían usando sus expresiones en coordenadas. Por tanto, es difícil un tratamiento de vectores de forma intuitiva en un entorno no dinámico, lo cual sí se ha llevado a cabo en la secuencia utilizando la tecnología. Por otro lado, el entorno colaborativo ha sido esencial para la gestión del problema. Los alumnos han llegado a formalizar con un detalle que no hubiera sido posible sin la discusión conjunta. Concluimos, como Bustos Rubilar y Zubieta Badillo (2019), que el hecho de intercambiar ideas o puntos de vista los ayuda a mejorar sus validaciones y a comprender el significado de justificar en matemáticas. En la mayoría de las ocasiones ha sido la profesora quien ha guiado al grupo a tratar el problema de una determinada forma y es quién ha conectado con otras situaciones, pasando a ejemplos distintos a los del problema. Podríamos pensar que es una discusión centrada en la profesora. No obstante, como señala la distribución de la tabla 1, muchos estadios han sido agrupados en las tres líneas inferiores, lo cual demuestra que los alumnos han tenido un gran protagonismo. La profesora ha llevado a cabo la orquestación de la situación, aunque si nos fijamos en la sucesión de los episodios, observamos que hay saltos en el orden en lugar de seguir uno tras otro los estadios planteados.

A lo largo de este estudio se han abordado varios aspectos de los que extraemos recomendaciones didácticas para profesores de matemáticas. Consideramos fundamental que el profesor haga una planificación adecuada de la clase de forma minuciosa, teniendo en cuenta las diferentes estrategias que pueden seguir los alumnos y que el uso del SGD puede modificar las características del problema. Durante el trabajo en parejas, el profesor debe permanecer atento a las diferentes actuaciones de los alumnos, teniendo presente la anticipación y los contenidos que se quieren conectar en la discusión. Después,

se deben seleccionar procesos de resolución que ayuden a encaminar el diálogo hacia los objetivos que se habían propuesto. Se recomienda orquestar la discusión en gran grupo desde el andamiaje de la solución seleccionada para ser expuesta y de las intervenciones de los participantes. Asimismo, deben introducirse preguntas que guíen hacia los diferentes contenidos a tratar, pero permitiendo a los alumnos actuar e intervenir por propia iniciativa.

Referencias

- Bustos, Á. S. y Zubieta Badillo, G. (2019). Desarrollo y cambios en las maneras de justificar matemáticamente de estudiantes cuando trabajan en un ambiente sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(3), 129-148. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2506>
- Cobb, P., Jackson, K. y Dumlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*.
- Cobb, P. y Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 213-228. <https://doi.org/10.1007/BF00304566>
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 213-234. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5>
- Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, 29(4), 1109-1131. <https://doi.org/10.5209/RCED.54880>
- Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (1999) The emergent perspective in rich learning environments: Some roles of tools and activities in the construction of sociomathematical norms. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 149-166. <https://doi.org/10.1023/A:1003769126987>
- Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83 - 97). SEIEM.
- Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. [Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona].
- Morera, L., Planas, N. y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Uhuz (Ed.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. ERME.
- Planas, N. y Boukafri, K. (2019). *Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático*.
- Ruiz-López, N. y Sáenz, C. (2013). Influencia de GeoGebra en la adquisición de competencias geométricas y didácticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 483-491). SEIEM.