

INSTRUMENTO PARA LA VALORACIÓN DIDÁCTICA DE LA NOCIÓN (EMPÍRICA) DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Instrument for the didactic assessment of the (empirical) notion of congruence of triangles

Peña Acuña, C. A. y Rigo-Lemini, M.

Cinvestav

Resumen

Se propone un Instrumento (IC) cuyas categorías permiten analizar y valorar, desde múltiples perspectivas, los significados que los alumnos, a partir de consideraciones empíricas, asocian a la congruencia de triángulos. El IC es útil para profesores e investigadores y es pertinente pues no parece existir alguno semejante en la literatura. Se ilustra la aplicación didáctica del IC con un ejemplo y se presenta en formato tabular para facilitar su uso; se precisan las ideas históricas y epistemológicas que orientaron la construcción del IC, alineada con la Teoría Fundamentada.

Palabras clave: congruencia de triángulos, instrumento de evaluación didáctica, Teoría Fundamentada.

Abstract

An Instrument (IC) is proposed whose categories allow analyzing and assessing, from multiple perspectives, the meanings that students, based on empirical considerations, give to the congruence of triangles; the IC is useful for teachers and researchers and is pertinent because there does not seem to be any similar one in the literature. The didactic application of the IC is illustrated with an example and is presented in a tabular format to facilitate its use; the historical and epistemological ideas that guided the construction of the IC, aligned with the Grounded Theory, are specified.

Keywords: congruence of triangles, instrument for didactic evaluation, Grounded Theory.

ANTECEDENTES, JUSTIFICACIONES Y OBJETIVOS

El concepto de congruencia de triángulos (y el de polígonos en general, pero aquí se hará referencia solo a los triángulos) es central en la edificación de la geometría, tanto para la que se enseña a partir de los niveles básicos de educación como para la geometría disciplinar.

En distintas versiones axiomáticas de la geometría euclidiana, el concepto de congruencia se incluye al comienzo de la construcción deductiva. En el caso de *Los Elementos de Euclides* (Heath, 1956), el concepto de igualdad se introduce en la Noción Común 4 (Heath, 1956) y las condiciones suficientes para la congruencia de triángulos se encuentran ‘demostradas’ en las proposiciones I.4; I.8 y I.26. Por otro lado, Hilbert (1996), en sus *Fundamentos de Geometría*, incluye la congruencia en su sistema formal como una noción primitiva y define propiedades de esa relación a través de diversos postulados (de los cuales desprende, entre otras cosas, la condición lado-ángulo-lado para congruencia de triángulos).

En el ámbito de la didáctica de la geometría, la noción de congruencia entre triángulos aparece desde el inicio de la enseñanza de la disciplina. Los planes curriculares de matemáticas de distintos países

lo corroboran: en el de México (SEP, 2017), el de Colombia (MEN, 2006) o en los NCTM (2000) de Estados Unidos se sugiere introducir (implícitamente) la noción de congruencia desde los primeros años de escolaridad y se indica que, a lo largo del ciclo básico de educación, se aplique explícitamente el concepto y los criterios de congruencia en la resolución de problemas o eventualmente, en la formulación de conjeturas y de pruebas sobre relaciones de congruencia entre objetos geométricos, como lo hace el NCTM (2000).

De modo que la congruencia entre triángulos es un puntal de la geometría disciplinar y escolar. Por ello, les puede resultar útil a profesores y a investigadores educativos contar con herramientas analíticas que les permitan examinar y valorar las respuestas que los estudiantes dan a tareas sobre congruencia, analizar sus comprensiones al respecto y dar cuenta de las dificultades que ellos tienen para entender y aplicar esa relación, con el objetivo de orientar a los alumnos sobre temas relacionados y/o diseñar intervenciones didácticas de manera fundamentada.

En la indagación que los autores de este documento hicieron sobre la investigación en didáctica de la geometría no encontraron marcos interpretativos referidos a la congruencia de triángulos, que ofrezcan esas herramientas analíticas. En torno a la congruencia, lo que abunda en la bibliografía son propuestas de intervención didáctica (p. ej., Carbó y Mántica, 2010; Piatek-Jimenez, 2008; Zakiz y Leron, 1991), que son valiosas en sí mismas pero que no brindan esas herramientas de análisis.

De cara a la inexistencia de dichas herramientas, los autores de este documento elaboraron un Instrumento para la Valoración Didáctica de la Noción de Congruencia de Triángulos (IC) aplicable en los ámbitos educativos en donde se conciba a la congruencia desde un enfoque empírico.

En la literatura especializada se puede consultar una propuesta en la que se caracterizan niveles de razonamiento de los alumnos para el caso de la semejanza en el plano (Gualdrón y Gutiérrez, 2007; Gualdrón, 2011), basada en los niveles del Modelo de pensamiento geométrico de los van Hiele. Esta propuesta es conceptualmente cercana al presente estudio (ya que la congruencia es un caso particular de la semejanza), afín en objetivos y concordante en ciertas orientaciones metodológicas.

Sin embargo, los autores de este documento consideraron que la relación de congruencia, por su lugar en la estructura geométrica, posee sus propias singularidades; optaron por esto elaborar el IC, dándole a las concepciones sobre la congruencia un tratamiento por separado.

El primer objetivo de este documento consiste en exponer el IC. El IC está integrado por un conjunto de categorías; estas se describen en los incisos del 1 al 7 del apartado Hallazgos... y se resumen en la figura 7. Debido a los límites de espacio, las categorías no se ilustran en Hallazgos sino en Aplicación Didáctica (dado que en el primer apartado se expone el IC y en el segundo se sugiere una aplicación). Para dejar ver el significado de algunas de las categorías del IC, en Aplicación Didáctica se introducen ejemplos de algunas respuestas dadas por un estudiante que participó en la muestra y de algunas preguntas introducidas en los cuestionarios utilizados en este estudio. El segundo objetivo consiste en presentar el IC en formato tabular y sugerir, con el ejemplo antes mencionado, algunas ideas para facilitar al docente los procesos de evaluación del concepto.

METODOLOGÍA, MÉTODOS ANALÍTICOS Y RECOLECCIÓN DE DATOS

Consideraciones metodológicas

Para la construcción del IC se siguieron principios de la Teoría Fundamentada (TF) en la versión que proponen Corbin y Strauss (2015). La TF permite construir, entre otras cosas, instrumentos para el análisis de datos empíricos y para la evaluación didáctica (aunque en última instancia, su objetivo es ofrecer herramientas para construir teorías). Esos instrumentos se integran por un conjunto de categorías analíticas. La TF propone una serie de herramientas y técnicas precisas para llevar a cabo la

definición de las categorías y su integración en un instrumento. En los reportes de investigación orientados por la TF no se introducen marcos teóricos porque de lo que se trata en esas investigaciones es justo construir marcos teóricos originales (y no partir de marcos teóricos previamente dados) a partir de un conjunto de datos empíricos. Recordemos que un marco teórico sirve de referente para el análisis de datos empíricos. Dado que el objetivo del IC es justamente servir de referente para el análisis de datos empíricos, el IC (que constituyen los hallazgos de esta investigación) cumple la misma función que un marco teórico. Es por esto que en esta comunicación se ha omitido el marco teórico. Si el lector está interesado en conocer cómo se emplearon las herramientas de la TF para hacer la construcción del IC, consulte Peña (2019). Aquí no se hace esta exposición por exceder los límites del espacio.

Métodos de recolección de datos empíricos y elección de actores

Como el propósito de la TF es construir marcos teóricos y validarlos constantemente con nuevos datos empíricos, en las investigaciones orientadas por la TF constantemente “se recurre a lugares, personas y situaciones que proporcionarán información sobre los conceptos que desea aprender” (Corbin y Strauss, 2015, p.135), es por esto que se recolectan datos deliberadamente elegidos y que concuerden con los propósitos de la investigación en curso, para eventualmente corroborar la validez de las categorías que integran esos marcos o para modificar esas categorías con el fin de que se vayan ajustando cada vez mejor a los datos empíricos. En resumen, de lo que se trata en la TF es de tener un amplio bagaje de datos empíricos que puedan darle validez a las categorías construidas. Es por esto que en la presente investigación se trabajaron con dos poblaciones distintas.

Una primera, integrada por 11 estudiantes de tercero de secundaria (14 a 15 años) de una escuela pública (de México). Se eligieron a aquellos que argumentaban de manera activa en sus clases de geometría. Todos ellos habían trabajado previamente los criterios de congruencia. Para la recolección de los datos se hizo uso de 4 cuestionarios que los alumnos resolvieron en 6 sesiones de 50 minutos. En la figura 1 se muestra ítems del cuestionario más significativo para el presente reporte (para el cuestionario completo v. Peña, 2019). En Aplicaciones también aparecen algunos ítems de los cuestionarios empleados. Los alumnos respondieron de forma individual los dos últimos cuestionarios, integrados por preguntas de tipo abierto con el propósito de darle al estudiante la oportunidad de expresar libremente sus ideas sobre la congruencia de acuerdo con sus posibilidades cognitivas, sus conocimientos y sus exigencias de racionalidad. La segunda población estuvo integrada por 16 maestros en formación en la Licenciatura en Educación Matemática (de Colombia), 8 de los cuales se encontraban en el último semestre de la licenciatura. Se trabajó con los estudiantes que voluntariamente participaron en el estudio. Para la recolección de datos se hizo uso de un cuestionario consistente de dos preguntas abiertas referidas a la congruencia de polígonos; no se estableció un límite de tiempo para la resolución del cuestionario ni se restringió el uso de herramientas tales como compás, softwares especializados o la consulta de libros de texto. Con el fin de ahondar en los significados que ellos pusieron en juego durante sus resoluciones se les realizó después una entrevista semiestructurada.

1. Dibuja dos triángulos ABC y DEF de tal manera que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (es decir, que dos de sus lados sean congruentes).

1.2 ¿Los dos triángulos que dibujaste en el punto 1 son congruentes? Si tu respuesta es SI, ¿qué te permite asegurar la congruencia?, si tu respuesta es NO, ¿Es posible dibujar dos triángulos ABC y DEF congruentes sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (que dos de sus lados son congruentes) y sin saber nada entre la relación de \overline{CA} y \overline{DF} ?

1.3. Esas dos condiciones (es decir, dos lados congruentes) ¿son suficientes para garantizar la congruencia de los dos triángulos?

Figura 1. Fragmento del Cuestionario 3.

HALLAZGOS: INSTRUMENTO PARA LA VALORACIÓN DIDÁCTICA DE LA NOCIÓN DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

El IC permite analizar, desde múltiples perspectivas, las resoluciones que los estudiantes dan a tareas de congruencia. En lo que sigue se describen las categorías que integran el IC.

(1) Enfoque de la idea de congruencia, considerando niveles de formalización

1.a) Enfoque empírico de la idea de congruencia. Para caracterizar la congruencia o delimitar sus propiedades, en este enfoque los alumnos involucran objetos geométricos de carácter físico (i.e., una entidad física real, tal como una imagen, un dibujo, un diagrama o una figura dinámica de computadora (Battista, 2007)) y suelen utilizar verbos de acción y movimiento (como superponer, aplicar o hacer coincidir) (cf. Balacheff, 2000).

1.b) Enfoque (localmente) deductivo de la idea congruencia. En las respuestas incluidas en esta categoría, los alumnos dan muestra de razonar en contextos localmente deductivos o a través de pruebas pre-formales (De Villiers y Hanna, 2012) sobre objetos geométricos teóricos o conceptuales.

Esta categoría no define el pensamiento global del alumno sino sus producciones puntuales. Este documento está centrado en el Enfoque empírico de la idea de la Congruencia.

(2) Relación entre las figuras geométricas que subyace a la idea de congruencia

En esta categoría se incluyen dos sub-categorías: congruencia intra y congruencia entre.

Esta pareja de categorías se inspiró en el concepto de etapa intrafigural -proveniente de la epistemología y la psicología genética-, etapa que se asocia a la del desarrollo de la geometría euclidiana. En esta geometría se estudian las propiedades de figuras y de cuerpos geométricos considerando relaciones internas entre sus elementos. No se toma en consideración el plano o el espacio que las contiene ni su organización formal (como ya sucede en la geometría cartesiana). Si se llegan a dar movimientos de figuras (p. ej., la superposición), no se explicitan, ni se reflexiona sobre ellos, ni forman parte de los conceptos que intervienen en la teoría (Piaget y García, 1982).

2.a) Congruencia intra. En esta categoría la congruencia se concibe como relación entre los componentes de un mismo triángulo.

2.b) Congruencia entre. Se concibe a la congruencia como relación entre dos o más triángulos.

(3) Consideración de los componentes del triángulo para definir la congruencia

3.b) Congruencia desde la perspectiva del análisis. Se entiende el término 'análisis' como un proceso cognitivo consistente en: a) separar las partes del objeto que se quiere entender; b) procurar comprender el comportamiento de las partes tomadas por separado y c) integrar esas comprensiones parciales en una comprensión integral o del todo (Ackoff, 1972). En esta subcategoría la noción de congruencia entre triángulos se conceptualiza con base en la congruencia (u otras relaciones) que se da(n) entre los componentes de los dos triángulos.

3.a) Congruencia como réplica. En esta caracterización no se consideran propiedades relativas a los componentes de los triángulos en ciernes. Partiendo de la representación gráfica de un triángulo, los estudiantes recrean otra, replicándola y considerándola como un todo (no descomponible).

(4) Condiciones necesarias para la congruencia

El estudiante establece explícitamente condiciones que, desde su entender, caracterizan las relaciones de congruencia entre triángulos. Estas condiciones necesarias pueden ser expresadas o aplicadas a

partir de un tratamiento instrumental de la idea de congruencia (i. e., como resultado de un aprendizaje memorístico en el que está ausente la reflexión sobre su significación general o incluso no hay toma de conciencia de estarlo empleando (Piaget y García, 1982)) o bien, a partir de un concepto de congruencia que se ha alcanzado a tematizar como resultado de la reflexión sobre sus características y propiedades (Piaget y García, 1982). Esta categoría incluye dos subcategorías.

4.a) *Condiciones necesarias de la congruencia definidas de manera asistemática y/o errónea*

4.b) *Condiciones necesarias de la congruencia matemáticamente correctas*

(5) Pautas (o condiciones suficientes) para la congruencia

En esta categoría el alumno intenta definir condiciones mínimas para que se dé la congruencia entre dos triángulos. Estas pautas (o condiciones suficientes, cuando se da el caso) pueden ser concebidas por el alumno a partir de un tratamiento instrumental de la idea de congruencia o bien a partir de un concepto de congruencia que se ha alcanzado a tematizar. Se distinguen dos subcategorías.

5.a) *Criterios incorrectos por carecer de relevancia desde el punto de vista matemático o por ser incompletos.*

5.b) *Criterios de suficiencia correctos, sin justificación*

(6) Procesos dinámicos en la caracterización de la congruencia

En una larga porción de la historia de la geometría la idea de congruencia se fundamentó en procesos dinámicos, si bien Hilbert prescindió ya del movimiento, como se aprecia en la figura 2:

Definición de congruencia mediante procesos dinámicos, con menor o mayor nivel de formalización:		Congruencia como noción primitiva (relación binaria aplicada a segmentos y ángulos). Postulados de congruencia; del Postulado 11 se desprende como corolario el criterio de congruencia entre triángulos ‘lado-ángulo-lado’ (Hilbert, 1996)
A través de procesos de superposición de figuras, en donde se busca la coincidencia de puntos o segmentos (Cfr. Balacheff, 2000).	Tomando como base los movimientos rígidos. Se trata de transformaciones isométricas del plano en sí mismo (traslaciones, rotaciones, reflexiones). Bajo esta perspectiva, introducida en la geometría proyectiva, la verificación de la congruencia se deriva de las propiedades de figuras y relaciones que quedan invariantes bajo transformaciones rígidas (Zubieta, s.f.).	
Superposición no definida. En la ‘demostración’ de las proposiciones I.4 y I.8 (basada implícitamente en la noción común 4: “las cosas que coinciden una con otra son iguales una con otra” (Heath, 1956, p. 225)), Euclides no habla directamente de superposición, de movimiento de figuras o de coincidencia; sin embargo, él emplea una fraseología (mediante expresiones como “se aplica”) que, de acuerdo con la interpretación de Heath (1956, p. 225), no deja lugar a dudas de que él estaba suponiendo que una figura se estaba moviendo (mental o simbólicamente) para colocarse sobre la otra.	Superposición definida explícitamente. Meray (1874), por ejemplo, busca explícitamente integrar el movimiento dentro de la geometría, haciendo referencia al proceso de superposición, de coincidencia y de desplazamiento (Cfr. Balacheff, 2000).	

Figura 2. Procesos dinámicos en la caracterización de la congruencia vistos en la historia.

Con base en las anteriores consideraciones se definieron las siguientes categorías:

6. a) *Congruencia sin referencia a la superposición y al movimiento.* En este caso, el proceso de superposición no resulta relevante para la comprobación de la congruencia (ni siquiera en la comparación de triángulos concretos manipulables); para este fin se suele acudir a otros procesos como lo es la comparación “a simple vista”.

6.b) *Congruencia con base en la superposición (implícita)*

6.c) *Congruencia con base en la superposición (definida)*

6.d) *Congruencia con base en los movimientos rígidos*

(7) Formas de conceptualizar la congruencia: Implícita o explícita

Un rasgo del conocimiento implícito es que la persona dispone de representaciones activas de las que no puede informar o de las que solo puede informar parcialmente, aunque estén influyendo en su conducta, la cual eventualmente puede ser visible para otros (Pozo, 2001).

7.a) *Noción implícita de la congruencia.* No hay referencias directas a la congruencia, aunque se deja ver que el alumno dispone de representaciones que él activa durante su resolución.

7.b) *Noción explícita de la congruencia.* Hay referencias directas a la congruencia y eventualmente el concepto ya se ha tematizado, dejando ver una reflexión sobre el concepto y sus propiedades.

UNA APLICACIÓN DIDÁCTICA DE LOS HALLAZGOS: INSTRUMENTO PARA LA EVALUACIÓN DE LA NOCIÓN DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Las categorías y subcategorías antes descritas se pueden integrar en una tabla que puede servir como instrumento didáctico para analizar y evaluar los significados, el nivel de comprensión o el de complejidad cognitiva que, en torno a la relación de congruencia, se dejan ver en las producciones de los estudiantes. En lo que sigue se ilustra esa posible aplicación, para lo cual se acude a las producciones de un estudiante (Felipe) que participó en la primera muestra del estudio.

(1) Nivel de formalización:

El Nivel de Formalización reflejado en la respuesta que Felipe da en la figura 3 corresponde al de Localmente Deductivo. En esa producción se puede reconocer una prueba pre-formal (De Villiers y Hanna, 2012) que hace referencia a objetos geométricos teóricos (generales): el alumno parte de las condiciones dadas en la tarea y de teoremas en acción de la geometría euclidiana que, aunque no hace explícitos se pueden entrever, y aplica un razonamiento inferencial lógico del cual deduce una conclusión genérica (son muchos los triángulos que se pueden formar bajo las condiciones dadas).

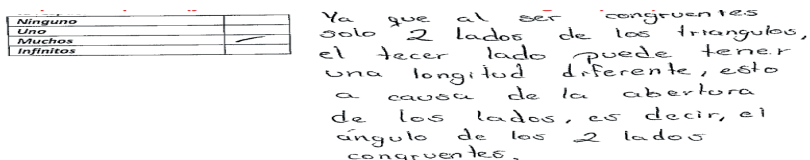


Figura 3. Respuesta de Felipe al ítem 1.1, cuestionario 3 (1.1, C3) a la pregunta ¿Cuántos posibles triángulos puede formar con dos pares de lados correspondientes congruentes?

(2) Relación entre las figuras geométricas que subyace a la idea de congruencia:

En la respuesta que Felipe da a (1.1, C3) (figura 3) deja ver que él establece Relaciones de Congruencia Entre figuras, pues cuando menciona “ya que al ser solo 2 lados de los triángulos congruentes”, explicita la relación de congruencia entre dos pares de lados correspondientes de los triángulos. Es posible reconocer este tipo de Relaciones entre figuras en muchas otras de sus respuestas, a manera de ejemplo está la respuesta dada por Felipe que se presenta en la figura 4.

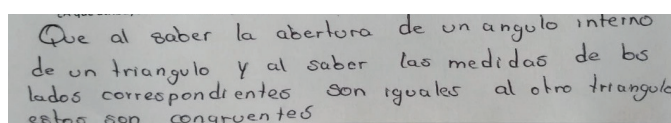


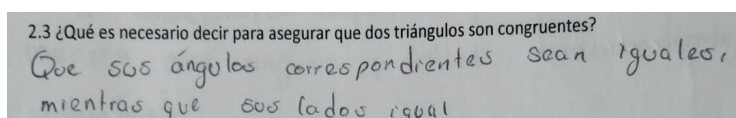
Figura 4. Respuesta de Felipe a (1.8, C3).

(3) Consideración de los componentes del triángulo para definir la congruencia:

Muchas de las producciones de Felipe se pueden caracterizar bajo la categoría Congruencia desde la perspectiva del Análisis ya que es posible reconocer ahí que él lleva a cabo un proceso de análisis (Ackoff, 1972). Por ejemplo, en la respuesta que da a (1.1, C3) (figura 3), se observa que él separa los triángulos en sus componentes (sus lados); establece relaciones de congruencia entre estos componentes (en particular, entre 2 pares de lados correspondientes congruentes); e integra las relaciones entre los componentes para establecer una conclusión sobre los triángulos (son muchos los triángulos que se pueden formar bajo las condiciones dadas).

(4) Condiciones necesarias para la congruencia:

Felipe establece Condiciones Necesarias de la Congruencia matemáticamente correctas (figura 5), porque, en sus propios términos, ofrece una definición de la relación de congruencia de triángulos.

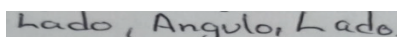


2.3 ¿Qué es necesario decir para asegurar que dos triángulos son congruentes?
Que sus ángulos correspondientes sean iguales,
mientras que sus lados igual

Figura 5. Respuesta de Felipe a (2.3, C2).

(5) Pautas (o condiciones suficientes) para la congruencia:

Se intuye que cuando Felipe escribe Lado, Angulo, Lado (figura 6) hace referencia al Criterio de Suficiencia Correcto de congruencia LAL y es que hay producciones (v. figura 3 y 4) en las que él justifica con sus palabras la razón de validez del criterio y deja ver que él lo comprende.

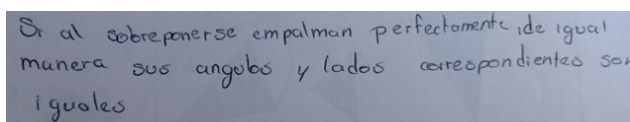


Lado, Angulo, Lado

Figura 6. Respuesta Felipe ítem 1.4, cuestionario 3.

(6) La presencia de procesos dinámicos en la caracterización de la congruencia:

La respuesta de Felipe a (2.6, C2) (figura 7) se ha ubicado en la subcategoría Superposición Definida ya que ahí él hace referencia directa al proceso de comparar haciendo uso de la superposición; especifica lo que debe ocurrir al sobreponer los polígonos (empalmar perfectamente); y, partiendo del proceso de superposición, deriva conclusiones relacionadas con los componentes del triángulo (“sus ángulos y lados correspondientes son iguales”).



Si al sobreponerse empalman perfectamente de igual
manera sus angulos y lados correspondientes son
iguales

Figura 7. Respuesta de Felipe (2.6, C2) a la pregunta ¿Cómo dirías que dos polígonos son congruentes?

(7) Formas de conceptualizar la congruencia:

Felipe hace Explícita su concepción de congruencia, como se puede observar en todas sus respuestas ahí hace referencia directa a la congruencia y eventualmente al concepto.

De las anteriores consideraciones se obtiene el IC, que aparece en la figura 8, asociado a Felipe.

<p>(1) Niveles de formalización</p> <p><input type="checkbox"/> a) Enfoque empírico de la idea de congruencia</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> b) Enfoque (localmente) deductivo de la idea congruencia</p>	<p>(4) Condiciones necesarias para la congruencia</p> <p><input type="checkbox"/> a) Definidas de manera asistemática y quizás errónea</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> b) Matemáticamente correctas</p>	<p>(6) El movimiento en la caracterización de la congruencia</p> <p><input type="checkbox"/> a) Sin referencia a la superposición y al movimiento</p> <p><input type="checkbox"/> b) Superposición no definida/procesos dinámicos</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> c) Superposición definida/procesos dinámicos</p> <p><input type="checkbox"/> d) Movimientos rígidos: Desplazamientos de figuras mediante la referencia a transformaciones isométricas) como la traslación, la rotación o la reflexión de figuras.</p>
<p>(2) Relación entre figuras</p> <p><input type="checkbox"/> a) Congruencia intra</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> b) Congruencia entre</p>	<p>(5) Pautas (o condiciones suficientes) para la congruencia</p> <p><input type="checkbox"/> a) Criterios incorrectos, por carecer de relevancia desde el punto de vista matemático o por ser incompletos</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> b) Criterios de suficiencia correctos (que coinciden con los de la matemática escolar), sin justificación</p>	<p>(7) Ideas implícitas o explícitas de la congruencia</p> <p><input type="checkbox"/> a) Noción implícita</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> b) Concepción explícita</p>

Figura 8. Instrumento Didáctico para la evaluación de las ideas de Congruencia (IC).

COMENTARIO FINAL: UTILIDAD Y PERTINENCIA DEL IC

El IC, basado en las interpretaciones que estudiantes dan a la relación de congruencia de triángulos, puede resultar útil a profesores e investigadores en tanto que permite analizar y evaluar significados (que parten de una perspectiva empírica) que estudiantes de distintos niveles educativos puedan expresar sobre la congruencia; valorar la complejidad cognitiva de sus respuestas a tareas sobre este concepto o identificar sus dificultades. El IC es, además, una propuesta novedosa, ya que no parece existir en la literatura en educación matemática una herramienta teórica, basada en datos empíricos, semejante. Por las dos consideraciones anteriores, el IC es también un instrumento pertinente.

Referencias

- Ackoff, R. (1972). *El arte de resolver problemas*. Limusa
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. U. de los Andes.
- Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Age.
- Carbó, A. y Mántica, A. (2010). Una propuesta para trabajar congruencia de triángulos en la escuela secundaria priorizando la validación. *Memorias de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática*, 376-386.
- Corbin, J. y Strauss, A. (2015). *Basics of qualitative research: techniques and procedures for developing grounded theory* (4th ed.). SAGE Publications.
- De Villiers, M. y Hanna, G. (2012). Aspects of Proof in Mathematics Education. En M. De Villiers y G. Hanna (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_1
- Gualdrón, E. y Gutiérrez, Á. (2007). Una aproximación a los descriptores de nivel de razonamiento de Van Hiele para la semejanza. En M. Camacho, P. Flórez y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 369-380).
- Gualdrón, E. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas* [Tesis doctoral, Universitat De València]. Universitat De València.
- Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary*. Dover.
- Hilbert, D. (1996). *Fundamentos de la geometría*. Bouncopy. S.A.

- MEN [Ministerio de Educación Nacional]. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*.
- Meray, Ch. (1874). *Nouveaux éléments de géométrie*.
- NCTM [National Council of Teachers of Mathematics]. (2000). *Principles standards and for school mathematics*. EE. UU.
- Peña, C. A. (2019). *Categorías para valorar el desempeño de estudiantes sobresalientes de tercero de secundaria ante tareas de congruencia de polígonos: una propuesta de ordenamiento conceptual*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Piatek-Jimenez, K. (2008). Building intuitive arguments for the triangle congruence conditions. *The Mathematics Teacher*, 101(6), 463-466. <https://doi.org/10.5951/MT.101.6.0463>
- Piaget, J y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo veintiuno.
- Pozo, J. (2001). *Humana mente: el mundo, la conciencia y la carne*. Ediciones Morata, S.L.
- SEP (2017). *Aprendizajes clave para la Educación Integral plan y programas de estudio para la educación básica*. Ciudad de México, México.
- Zakiz, R. y Leron, U. (1991). Capturing congruence with a turtle. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 285-295. <https://doi.org/10.1007/BF00368342>
- Zubieta, G. (s.f.). *Movimientos rígidos*. Cinvestav.