

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA COM TECNOLOGIA: INSPIRANDO ALUNOS DURANTE A PANDEMIA ATRAVÉS DO CLUBE TECN@MAT

Mathematical problem-solving with technology: inspiring students during the pandemic through the Tecn@Mat Club

Jacinto, H.

Universidade de Lisboa

Resumo

A pandemia Covid-19 instituiu a necessidade de cumprir distanciamento social que levou ao encerramento de atividades extracurriculares que envolvem colaboração e trabalho em equipa. Nesta comunicação analisa-se um programa extraescolar online que promove resolução de problemas de matemática com tecnologias, o Clube Tecn@Mat. A partir de uma discussão teórica sobre a utilização de tecnologias digitais para resolver problemas, reporta-se um estudo de caso exploratório que visou caracterizar o design e a implementação do Clube, bem como documentar as experiências dos participantes em termos da sua capacidade de resolver problemas e expressar as suas soluções com tecnologia. Observou-se uma redução no uso de papel-e-lápis à medida que os participantes aprenderam sobre as potencialidades das tecnologias digitais para desenvolver abordagens aos problemas e para descrever os processos e os raciocínios com precisão.

Palavras-chave: *clube de matemática, estudo de caso exploratório, fluência tecno-matemática, resolução de problemas com tecnologias digitais, pandemia.*

Abstract

The Covid-19 pandemic introduced the need to comply with social distancing, which led to the closure of extracurricular activities that involve collaboration and teamwork. This communication analyses an online after-school program that promotes mathematical problem solving with technologies, the Tecn@Mat Club. Based on a theoretical discussion on the use of digital technologies to solve problems, an exploratory case study is reported aiming to characterize the design and implementation of the Club, as well as to document the participants' experiences in terms of their ability to solve the problems and express the solutions with technology. A decrease in the use of paper-and-pencil was observed as participants learned about the affordances of digital technologies to develop approaches to the problems and to describe their processes and reasoning accurately.

Keywords: *math club, problem solving with digital technologies, techno-mathematical fluency, exploratory case study, pandemic.*

INTRODUÇÃO

A pandemia Covid-19 transformou o ensino e a aprendizagem da matemática em todo o mundo (Aldon et al., 2021; Borba, 2021; Drijvers et al., 2021; Kalogeropoulos et al., 2020). Os sucessivos

Jacinto, H. (2022). resolução de problemas de matemática com tecnologia: inspirando alunos durante a pandemia através do clube Tecn@Mat. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 31-46). SEIEM.

confinamentos foram extremamente exigentes para professores, alunos e suas famílias. Em Portugal, quando as escolas reabriram, a necessidade de cumprir o distanciamento social levou ao encerramento de atividades extracurriculares que normalmente envolvem interação, colaboração e trabalho em equipa, de que os Clubes de Matemática são exemplo.

Os clubes de matemática encontram-se entre a diversidade de iniciativas de enriquecimento curricular que podem ser desenvolvidas no espaço escolar ou para além da própria escola, e são conceptualizados como espaços onde jovens que gostam de matemática e partilham ideias semelhantes sobre a matemática se reúnem (Durbin, 2020). Os alunos encontram nestes clubes oportunidades para desenvolver a sua autoestima e um sentimento de pertença e de propósito (Papanastasiou e Bottiger, 2004).

Excetuando-se algumas iniciativas extraescolares de resolução de problemas (e.g., Carreira et al., 2016), os clubes de matemática não têm recebido muita atenção da parte dos investigadores portugueses. De igual forma, não tem sido produzida investigação abundante sobre esta temática no panorama internacional. Contudo, alguns estudos têm procurado compreender os aspetos subjacentes ao sucesso dos clubes de matemática e existem, na literatura, evidências de que a participação nestas iniciativas influencia a aprendizagem e as atitudes dos alunos perante a matemática.

Com base em dados recolhidos num clube de matemática de uma escola americana em que os alunos tendiam a obter excelentes resultados em testes de matemática estandardizados, Papanastasiou e Bottiger (2004) concluíram que participantes naquela atividade extracurricular revelavam atitudes muito positivas tanto em relação à disciplina de matemática como em relação ao próprio clube. Os investigadores também analisaram as razões que levavam os alunos a participar no clube, identificando motivos relacionados com a aprendizagem da matemática, motivos relacionados com fatores extrínsecos (tais como estar com os amigos), e outros relacionados com as características do clube (por exemplo, pelo facto de ser permitido usar a calculadora ou trabalhar em grupo).

Num estudo em que procuravam compreender as formas de raciocínio de alunos envolvidos num ambiente informal extraescolar baseado na resolução de problemas, Mueller e Maher (2009) concluíram que se a iniciativa é propícia à exploração e à colaboração, os alunos procuram defender os seus pontos de vista e raciocínios, tanto em pequenos grupos como no grande grupo de participantes. Os jovens não só construíram argumentos de forma colaborativa como forneceram justificações matemáticas para as soluções que desenvolveram.

Em 2016 foi conduzido na África do Sul o projeto *Pushing for Progression*, que providenciou formação contínua a professores de modo a apoiar a dinamização de clubes de matemática numa dada região do país (Stott et al., 2019). Os investigadores analisaram o impacto desta iniciativa no desempenho dos alunos, tendo concluído que foi positivo na aprendizagem das quatro operações aritméticas, tanto ao nível da fluência procedimental como da compreensão conceptual, num período de tempo relativamente curto de envolvimento num dos clubes de matemática que analisaram. Concluíram ainda que as parcerias estabelecidas entre os académicos, as entidades educativas distritais e os professores foram determinantes no sucesso do projeto e também para a aprendizagem dos alunos envolvidos nos clubes.

O impacto da participação neste tipo de atividades no desempenho dos alunos em matemática foi recentemente analisado por Durbin (2020). A partir de uma amostra representativa de mais de 23 000 alunos de 9.º ano, o investigador concluiu que o envolvimento prévio em competições matemáticas e em clubes de matemática leva a um aumento significativo da proficiência dos alunos.

Os clubes de matemática parecem ser, assim, espaços de encontro e partilha entre alunos que gostam e têm interesse pela aprendizagem da matemática, participando em jogos e competições, em que a resolução de problemas é uma das atividades privilegiadas. A participação nestas atividades tem impacto não só em termos do desenvolvimento de capacidades matemáticas, como de atitudes positivas em

relação à aprendizagem, à disciplina de matemática, e à percepção da própria capacidade de ter sucesso em matemática. O Clube Tecn@Mat surgiu assim com vista a proporcionar um espaço de trabalho colaborativo em torno de uma atividade de resolução de problemas de matemática, procurando contornar o isolamento originado pela obrigação de manter distanciamento social.

Constituindo-se como um programa extracurricular pioneiro em Portugal, o Clube Tecn@Mat promove atividades matemáticas de enriquecimento *online* com recurso a tecnologias digitais, destinado a alunos do 3.º ciclo do ensino básico (12-14 anos), através da resolução de desafios matemáticos num ambiente colaborativo.

O estudo de que aqui se dá conta, pretende discutir os aspetos teóricos que fundamentaram o *design* do Clube Tecn@Mat, com particular incidência na conceção do seu conteúdo e da sua implementação, bem como examinar o impacto das experiências dos participantes no Clube em termos do desenvolvimento de competências matemáticas e tecnológicas para resolver os problemas e exprimir os seus raciocínios. Muito em particular, debruçar-me-ei sobre a primeira edição do Clube Tecn@Mat que decorreu num dos momentos críticos da pandemia Covid19 em Portugal, no final do primeiro confinamento.

Na secção seguinte discutirei ideias chave sobre o uso de tecnologias digitais para resolver problemas de matemática e o tipo de competências necessárias ao sucesso nessa atividade, conceitos que guiaram o *design* e a implementação do Clube Tecn@Mat.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA COM TECNOLOGIAS DIGITAIS

O planeamento e a conceção do Clube Tecn@Mat tiveram em consideração perspectivas teóricas sobre o impacto do uso de tecnologias digitais na aprendizagem da matemática bem como resultados de estudos empíricos focados na atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias digitais em ambientes extraescolares (Carreira et al., 2016; Jacinto, 2017; Jacinto e Carreira, 2017a, 2021; Carreira e Jacinto, 2019).

A primeira ideia chave envolve a conceptualização da cognição em habitats digitais como emergente das interações entre os indivíduos, as ferramentas tecnológicas e o ambiente circundantes no qual a atividade matemática decorre, aqui em concreto, a resolução de problemas. Várias metáforas têm sido avançadas sobre o papel da tecnologia na aprendizagem da matemática. Em 2005, Geiger considerou que as ferramentas digitais podem funcionar, entre outros, como *extensão de si próprio*, por exemplo quando o aluno “incorpora conhecimentos tecnológicos como parte integrante de seu repertório matemático” (Geiger, 2005, p. 371). Alega o autor que, quando a tecnologia é usada para desenvolver pensamento matemático, a fronteira entre o sujeito que pensa matematicamente e a ferramenta que suporta esse pensar torna-se nebulosa, difícil de identificar, pois a ferramenta é incorporada “tão naturalmente como um recurso intelectual” (Geiger, 2005, p. 371). Nesta mesma linha, Borba e Villarreal (2005), reconhecendo o poder da tecnologia em transformar e reorganizar o pensamento matemático, propuseram que se considerasse como sujeito responsável por conhecer, pensar e agir uma unidade indivisível – o ser-humano-com-media. Sinclair (2020) vem também contribuir para esta perspectiva concordando que, tendo em conta as diversas possibilidades de interação entre um indivíduo e a tecnologia, pode não ser possível estabelecer uma delimitação clara entre as suas ações e o pensamento (matemático) que é espoletado pelo uso de tecnologias digitais.

À semelhança de experiências de enriquecimento curricular anteriores (e.g., os campeonatos de resolução de problemas documentados em Carreira et al., 2016), o Clube Tecn@Mat pretende ser um espaço que promove o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de matemática. Importa, assim, discutir o que se entende por ‘problema’, por ‘resolução de problemas’ e, em particular, por ‘resolução de problemas com tecnologias’. Os problemas propostos no Clube Tecn@Mat podem

ser considerados *problemas não rotineiros* pois encerram uma situação desafiadora para o aluno embora este não disponha de um processo matemático direto que lhe garanta obter a sua solução (Saadati e Felmer, 2021, Schoenfeld, 1985). Esta definição, que revela uma grande proximidade com o contexto da aula de matemática, foi desafiada por Lesh e Zawojewski (2007) ao considerar que a resolução de problemas também deve possibilitar a percepção da relação entre as noções matemáticas e as situações do mundo real, para além da sala de aula. Na perspetiva destes autores,

uma tarefa, ou atividade direcionada para um objetivo, torna-se um problema (ou uma situação problemática) quando o solucionador, que pode ser um grupo de especialistas em colaboração, precisa de desenvolver uma forma mais produtiva de pensar sobre a situação dada. (p. 782).

Tal como na resolução de problemas com papel-e-lápis, a resolução de problemas de matemática com tecnologias implica o envolvimento numa atividade de matematização onde o jovem-com-media deve conceber uma forma produtiva de pensar para lidar com tal situação desafiadora, tendo como resultado um modelo conceptual da situação (Lesh e Zawojewski, 2007). Como os modelos conceptuais transmitem os entendimentos matemáticos tidos sobre as situações, são geralmente “expressos usando uma variedade de meios de representação” (Lesh e Harel, 2003, p. 159) pelo que podem incorporar diagramas ou gráficos baseados em papel, mas também tabelas, texto escrito, símbolos, desenhos, imagens, gráficos ou figuras dinâmicas produzidos com tecnologias digitais. Contudo, “é a qualidade descritiva e explicativa do pensamento que faz com que funcione como um modelo” (Carreira et al, 2013, p. 55), pelo que a forma como os jovens-com-media exteriorizam a sua interpretação da situação e explicam as suas abordagens para obter a solução remete para considerar que as fases de resolução do problema e de elaboração da resposta estão intimamente ligadas. A obtenção de soluções para os problemas inclui, assim, a criação de descrições explicativas que “não são simplesmente suplementos que os alunos incluem após a ‘resposta’ ter sido produzida. Eles SÃO os componentes mais importantes das respostas que são necessárias” (Lesh e Doerr, 2003, p. 3, ênfase no original). Nesta linha, *resolver-e-exprimir* é um conceito chave que resume uma conceptualização desta resolução de problemas como um processo simultâneo de matematização da situação e de expressão do pensamento matemático desenvolvido (Carreira et al., 2016; Jacinto e Carreira, 2017a; 2021).

A investigação também tem mostrado que a resolução-e-expressão de problemas por meio de tecnologias digitais resulta na produção de uma narrativa, de uma história que conta como foi desenvolvida a solução de um dado problema (Jacinto e Carreira, 2017a). Este *discurso matemático digital expositivo* (Stahl, 2009) é, assim, impulsionado pelas ferramentas matemáticas e tecnológicas utilizadas, e destaca-se pelo uso de cores, pelos desenhos, imagens ou fotos, pelo recurso à linguagem natural e simbólica, e pelo uso de ficheiros produzidos com outros programas como os de geometria dinâmica ou as folhas de cálculo (Carreira et al., 2016).

Outro aspeto que presidiu à seleção e criação dos problemas para o Clube Tecn@Mat diz respeito ao nível de desafio que idealmente devem conter, já que “a predisposição para resolver uma tarefa parece diminuir em duas situações: quando as expectativas acerca da probabilidade de sucesso são muito elevadas (a tarefa é demasiado fácil) ou quando são muito baixas (a tarefa é demasiado difícil)” (Carreira et al., 2013, pp. 545-546). O conceito de *desafio matemático moderado* (Turner e Meyer, 2004), adotado no âmbito do projeto Problem@Web (Carreira et al., 2013, 2016), é particularmente útil pois contribui para criar um certo equilíbrio, que é necessário e desejável, isto é, o desafio deve cativar os alunos ao ponto de o procurarem resolver (Schweinle et al., 2013) e, embora a obtenção da sua solução exija esforço, o problema deve estar ao alcance de todos os alunos.

Deste modo, o Clube Tecn@Mat pretende constituir-se como um espaço em que os jovens participantes possam desenvolver a sua capacidade de resolver problemas de matemática com tecnologias digitais. Ter sucesso nesta atividade envolve, entre outros, o uso de recursos matemáticos adequados

(Schoenfeld, 1985) mas envolve também considerar que as ferramentas digitais são artefactos igualmente indispensáveis (Jacinto e Carreira, 2017a). É, portanto, necessário discutir em que consiste a proficiência de um jovem-com-media a resolver desafios moderados recorrendo a ferramentas matemáticas e tecnológicas. Hoyles et al. (2010) analisaram a capacidade de usar o conhecimento tecnológico e matemático para resolver problemas do quotidiano ou relacionados com o mundo profissional, propondo a designação de “literacia tecno-matemática”. Conforme testemunhado nos ambientes de trabalho que estudaram, a literacia tecno-matemática dos trabalhadores não era adequadamente desenvolvida no contexto laboral, o que despertou nos investigadores a necessidade de desenvolver essa capacidade explicitamente. Assim, a literacia tecno-matemática apresenta-se como uma noção relevante para abordar a proficiência, de jovens-com-media, necessária à resolução-e-expressão de problemas de matemática.

Como identificado em estudos anteriores (e.g., Jacinto e Carreira, 2017a; 2021), uma característica marcante da atividade de resolução e expressão de problemas com tecnologias é a noção de *fluência*. Trazida por Papert e Resnick (1995), a ideia de fluência parece mais apropriada para descrever a capacidade de articular uma ideia complexa por meio de uma ferramenta digital, e ser-se capaz de produzir ou construir coisas relevantes com essa tecnologia. A noção de *fluência tecno-matemática* (FTm) tem sido usada para designar a capacidade de combinar conhecimentos matemáticos e tecnológicos para resolver e expressar problemas de matemática (Jacinto e Carreira, 2017a, 2017b). Tal como a fluência digital (Barron et al., 2007), a fluência tecno-matemática implica ser-se capaz de selecionar recursos úteis de um conjunto de possibilidades, matemáticas ou tecnológicas, identificar *affordances* ou restrições nesses recursos, e saber como uma determinada ferramenta pode ser usada para criar uma solução tecno-matemática para um problema (Jacinto e Carreira, 2017b). Importa frisar que o conhecimento matemático orienta o uso da tecnologia, pois permite o reconhecimento de *affordances* que podem determinar tanto a abordagem como o modelo conceptual desenvolvido no decurso da obtenção da solução (Yao e Manouchehri, 2019).

CONSIDERAÇÕES SOBRE A METODOLOGIA DE PESQUISA

Com o propósito de descrever e compreender as características do Clube Tecn@Mat que contribuem para o envolvimento dos alunos na atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias, foi desenvolvido um estudo de caso exploratório (Stake, 1995), com suporte na recolha e análise de dados qualitativos e quantitativos.

Os participantes

Todos os participantes nesta primeira edição do Clube aceitaram participar na investigação, mediante o consentimento informado dos seus encarregados de educação. Nesta edição do Clube participaram 12 alunos, 4 rapazes e 8 raparigas, com idades compreendidas entre os 12 e os 14 anos. Sete alunos frequentavam o 7.º ano de escolaridade, quatro eram alunos de 8.º ano, e um dos alunos encontrava-se no 9.º ano. Os 12 alunos pertenciam a escolas da região do Algarve, da Grande Lisboa e do Minho. A participação no Clube e no estudo foi voluntária e decorreu de divulgação efetuada junto de vários professores de matemática e dos diretores das turmas dos alunos participantes.

A recolha e análise dos dados

A recolha de dados decorreu em vários momentos. Durante as sessões do Clube, via Zoom, procedeu-se à vídeo-gravação do trabalho em grande grupo bem como do trabalho autónomo realizado em 4 salas simultâneas; recolheram-se também os ficheiros digitais criados pelos participantes, quer para resolver, quer para exprimir os processos de resolução. No final de cada sessão, os participantes

foram convidados a responder a um questionário *online* que possibilitava obter dados quantitativos e descritivos relativamente ao problema resolvido, ao envolvimento dos membros de cada equipa, às estratégias e às ferramentas tecnológicas usadas. Após a conclusão das atividades do Clube, foi realizada uma entrevista aos participantes, via Zoom e vídeo-gravada, organizada em 3 grandes temáticas – a resolução de problemas de matemática, o uso de tecnologias, e o trabalho colaborativo – pedindo-se aos alunos que se reportassem tanto às suas experiências na aula de matemática como no Clube Tecn@Mat. Recolheram-se também todos os documentos de apoio à dinamização do clube, em particular, os planos de cada uma das sessões, os ficheiros criados e as apresentações utilizadas. Nesta comunicação, irei reportar-me aos documentos de apoio às sessões, bem como aos dados recolhidos através dos questionários aplicados em cada sessão e das entrevistas realizadas aos participantes após a conclusão das atividades do Clube.

Os dados qualitativos foram organizados e tratados com recurso ao software NVivo, enquanto os dados de natureza quantitativa foram analisados recorrendo a estatística descritiva para identificar padrões ou alterações nas atitudes dos alunos perante a resolução de problemas de matemática com tecnologias digitais. Dado o pequeno número de participantes e o propósito exploratório do estudo, não se procurou estabelecer inferências nem determinar significância estatística, mas antes proporcionar uma descrição do caso em análise que permita uma compreensão em profundidade do modo de funcionamento do Clube e das experiências dos seus participantes, muito em particular no que diz respeito ao desenvolvimento da capacidade de resolver e exprimir problemas de matemática com tecnologias digitais. O processo de análise envolveu uma leitura meticulosa dos dados qualitativos e a subsequente procura e identificação de referentes-chave tendo por base os conceitos centrais discutidos teoricamente, cruzando-se com os resultados quantitativos sempre que oportuno.

O CLUB TECN@MAT

Em seguida descrevem-se as principais características do Clube Tecn@Mat, tanto do ponto de vista do *design* e da implementação do seu currículo, como na perspetiva dos jovens participantes e das experiências que reportaram.

Modo de funcionamento do Clube

O Tecn@Mat é um clube virtual de resolução colaborativa de problemas de matemática com tecnologias digitais, dirigido a alunos do 3.º ciclo do ensino básico (12-14 anos). A primeira edição do Clube Tecn@Mat foi implementada entre maio e julho de 2020, a partir do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Esta é uma iniciativa extraescolar que tem, desde a sua génese, uma natureza inclusiva, como bem ilustra o seguinte excerto do documento que visava obter o consentimento informado dos encarregados de educação para a participação no estudo dos seus educandos:

O Clube Tecn@Mat pretende ser um espaço privilegiado de encontro entre alunos entusiastas de desafios matemáticos e da utilização de tecnologias, independentemente das suas classificações na disciplina. Os alunos terão oportunidade de se envolverem numa atividade matemática agradável, desafiante e entusiasmante, num clima descontraído, embora de aprendizagem.

A conceção do Clube previa estimular o envolvimento numa atividade de resolução de problemas de matemática para todos e ao alcance de todos, independentemente do seu desempenho na disciplina, pelo que este clube se destaca de outras iniciativas em que a resolução de problemas é usada como fator de seriação ou de seleção de alunos especialmente talentosos. Com efeito, os alunos participantes

caracterizaram-se como alunos empenhados e interessados na disciplina de matemática, embora as suas classificações no final do ano letivo variassem entre o nível 3 e o nível 5 (numa escala em que 1 é a classificação mínima e 5 a máxima).

As atividades do Clube foram apoiadas essencialmente por uma plataforma de videoconferências (Zoom), por ferramentas e aplicações Google (e.g., Drive, Google Docs e Sheets) e uma página *web*. O Clube funcionou uma vez por semana ao longo de 5 sessões síncronas, cada uma com a duração de 90 minutos. Entre a 2ª e a 3ª sessão houve uma sessão assíncrona em que foram publicados dois desafios que os participantes podiam resolver autonomamente.

O trabalho nas sessões tinha como suporte um *website* onde eram disponibilizadas informações de carácter geral relacionadas com o projeto de investigação no qual o Clube estava ancorado. Em particular, uma das páginas do *website* era dedicada ao Clube Tecn@Mat e disponibilizava o conteúdo para o trabalho nas sessões (e.g., os enunciados dos desafios a resolver em cada sessão, algumas instruções, links para a submissão das soluções e de acesso aos questionários). Uma outra página abordava alguns conceitos básicos sobre resolução de problemas de matemática, nomeadamente, etapas de resolução de problemas, heurísticas, exemplos de estratégias mais comuns na resolução de problemas.

O conteúdo das sessões: problemas, conceitos matemáticos e tecnologias abordadas

Os problemas propostos foram selecionados ou criados de modo que, num curto espaço de tempo, facultassem experiências com diferentes ferramentas tecnológicas e não exigissem o uso de conhecimentos matemáticos avançados, já que o propósito era o de manter os participantes envolvidos na atividade de resolução de problemas com tecnologias e não o da instrução de conteúdos curriculares específicos (Tabela 1). Embora alguns dos problemas pudessem ser resolvidos com recurso a conhecimentos ou procedimentos matemáticos mais avançados (como é o caso do desafio “Gaiolas e periquitos” cuja solução pode ser obtida através da resolução de um sistema de duas equações com duas incógnitas), o facto de admitirem várias abordagens ou estratégias de resolução, associado à possibilidade de se poder tirar partido de ferramentas tecnológicas apropriadas, coloca estes desafios num nível mais acessível.

Apesar de ser permitido e incentivado o recurso às ferramentas tecnológicas que os participantes considerassem mais úteis e eficazes ao seu trabalho, os desafios foram igualmente escolhidos de modo a criar oportunidades para explorar programas específicos que apoiam o desenvolvimento de abordagens matemáticas, como é o caso dos ambientes de geometria dinâmica ou das folhas de cálculo. Também foi tida em consideração a possibilidade de analisar vantagens matemáticas de determinadas funcionalidades em programas de uso comum, como o editor de texto ou o editor de apresentações (e.g., para organizar informação recorrendo a representações tabulares, criação de esquemas ou diagramas) e ainda programas de criação de animações e vídeo.

Tabela 1. Sumário do conteúdo das sessões do Clube Tecn@Mat (fonte: guiões das sessões).

Sessão	Desafios	Conceitos matemáticos	Ferramentas tecnológicas
1	Unidos e cortados	Áreas de polígonos	GeoGebra (construção de figuras robustas; determinação de áreas; folha de cálculo do GeoGebra).
	Quantos retângulos?	Quadriláteros. Soma dos primeiros n números inteiros positivos.	GeoGebra (construção de figuras; folha de cálculo).

Tabela 1. (Continuación)

2	Círculos de encaixe	Área do círculo. Razão.	GeoGebra (construção de figuras; determinação de áreas; folha de cálculo).
	As três casas	Raciocínio lógico.	Editor de texto ou editor de apresentações (representação tabular).
3	Gaiolas e periquitos	Relações numéricas e algébricas, envolvendo o conceito de variável (sistema de duas equações com duas incógnitas).	Folha de cálculo (escrita, formatação de células, fórmulas simples, preenchimento automático de células).
	A inauguração do “Sombrero Style”	Relações numéricas e algébricas, envolvendo os conceitos de fração, múltiplo, variável.	Folha de cálculo (escrita, formatação de células, fórmulas simples, preenchimento automático de células).
4	Uma pizza à medida	Combinatória.	Editor de texto ou de apresentações. Editor de vídeo.
	Reencontro de amigos	Raciocínio co-variacional.	Folha de cálculo (escrita, formatação de células, fórmulas simples, preenchimento automático de células).
5	Cubos no chão	Relações numéricas e algébricas, envolvendo o conceito de quadrado perfeito.	Folha de cálculo (escrita, formatação de células, fórmulas simples, preenchimento automático de células).
	Chaves e cadeados	Combinatória.	Editor de texto ou editor de apresentações. Editor de vídeo.

Uma sessão típica no Clube

Uma sessão típica incluía três grandes momentos. Um momento inicial envolvia todos os participantes e visava estabelecer a organização da sessão e relembrar regras de participação no Clube (e também no estudo). Nas sessões iniciais discutiu-se ainda em que consiste a resolução de problemas de matemática com tecnologias, nomeadamente, a importância de “apresentar e explicar o processo de resolução com clareza” (apresentação, Sessão 1), a indicação de que é permitido recorrer a qualquer ferramenta tecnológica bem como construir esquemas, utilizar figuras, realizar cálculos ou incorporar explicações que os participantes julgassem necessárias e adequadas. Pretendia-se legitimar o recurso a qualquer ferramenta que os participantes considerassem oportuna e o uso de uma diversidade de representações, incentivando assim o desenvolvimento de um discurso matemático digital expositivo (Stahl, 2009).

O segundo momento tinha a duração aproximada de 60 minutos e envolvia o trabalho autónomo dos participantes, organizados em equipas de 3 elementos, em salas simultâneas. A cada equipa era solicitado que escolhesse um dos dois problemas publicados em cada sessão, o resolvesse usando as ferramentas da sua preferência, criasse a sua resolução e enviasse o(s) ficheiro(s) por email para a coordenação do Clube. O recurso à Google Drive, de acesso exclusivo a cada equipa, permitia aos participantes colaborar em tempo real na co-construção de ficheiros Google Docs e Google Sheets para resolver os problemas ou elaborar a solução final de cada problema. Durante o trabalho autónomo dos alunos, a dinamizadora circulava pelas salas simultâneas observando o trabalho colaborativo e esclarecendo dúvidas pontuais.

Um terceiro momento de trabalho, de novo em grande grupo, envolvia a discussão das soluções produzidas pelas várias equipas. Para além disso, foram também apresentadas produções de outros alunos que resolveram problemas idênticos, sobretudo a partir de resultados do projeto Problem@Web (Carreira et al., 2016), ilustrando a diversidade de abordagens e de ferramentas tecnológicas que podem ser úteis e eficazes na resolução-e-expressão dos problemas.

Por exemplo, na sessão 1 foram propostos os problemas “Unidos e cortados” e “Quantos retângulos?” (Figura 1) com a finalidade de testar a organização do trabalho previsto e a gestão dos diferentes espaços de trabalho virtual e colaborativo. No final dessa sessão, apresentou-se o GeoGebra aos participantes, nomeadamente, percorrendo algumas das suas ferramentas e explicitando algumas *affordances* deste ambiente de geometria dinâmica e de como delas se pode tirar partido para resolver problemas, convidando os participantes a voltar a explorar estes problemas por si próprios recorrendo a esta ferramenta.



Desafio 1: “Unidos e cortados”

Considerem uma sequência de quadrados de lados 1, 2, 3, 4,... centímetros, dispostos de modo a ficarem unidos uns aos outros, como ilustra a figura. Depois de juntos, cortam-se todos os quadrados segundo uma linha que parte do vértice inferior esquerdo do quadrado menor até ao vértice superior direito do quadrado maior. Qual é a área que fica acima da linha de corte se a sequência tiver 8 quadrados?

Desafio 2: “Quantos retângulos?”

Quantos retângulos é possível construir dentro do polígono regular da figura, unindo vértices?

E se o polígono regular tivesse 100 lados? E se tivesse n lados?

Não se esqueçam de explicar o vosso processo de resolução!

Figura 1. Problemas propostos na Sessão 1 do Clube Tecn@Mat.

Em cada sessão foram propostos dois desafios matemáticos (Figura 1), que podem ser considerados como problemas não rotineiros (Jacinto et al., 2016) no sentido em que não estão alinhados com o currículo escolar, mas visam estimular intelectualmente os alunos e requerem o desenvolvimento de uma estratégia ou abordagem que envolve conceitos ou procedimentos matemáticos. Esta possibilidade de escolha serviu dois propósitos: por um lado, ocasionar uma leitura atenta de cada desafio que alimentasse uma discussão inicial em cada equipa em torno dos problemas e, por outro, contribuir para uma maior expectativa acerca da possibilidade de obter sucesso e assim persuadir os participantes a tentar resolver o problema da sua preferência (Carreira et al., 2013; 2016; Turner e Meyer, 2004). Apesar de ambos os problemas poderem ser considerados desafios matemáticos moderados, o seu grau de dificuldade é inerente ao conhecimento e capacidades dos alunos participantes, pelo que pode ser percecionado de forma diferente por eles.

Na secção seguinte apresentam-se alguns resultados relativos aos dados produzidos pelos questionários aplicados aos participantes solicitando a sua apreciação do trabalho realizado em cada sessão do Clube Tecn@Mat e às entrevistas realizadas após as atividades do clube encerrarem.

A VOZ E A EXPERIÊNCIA DOS PARTICIPANTES NO CLUBE TECN@MAT

Sobre os problemas de matemática

Os participantes aparentavam manter uma boa relação com a matemática e, em particular, com a resolução de problemas, não obstante a variabilidade observada no desempenho escolar destes 12 alunos anteriormente documentada. Relativamente ao gosto sentido pelos participantes aquando da resolução dos problemas escolhidos em cada sessão, é possível observar que o valor médio é elevado e se mantém em valores relativamente próximos ao longo das quatro sessões avaliadas, variando entre os

4.5 e os 4.82 (Figura 2). Na entrevista final, entre as várias razões apresentadas pelos participantes para a identificação do desafio que mais gosto lhes deu resolver encontra-se o tema matemático associado (e.g., “acho mais giro problemas de lógica” [CC]), e o nível de desafio sentido (e.g., “Gostei porque foi desafiante” [FN]).

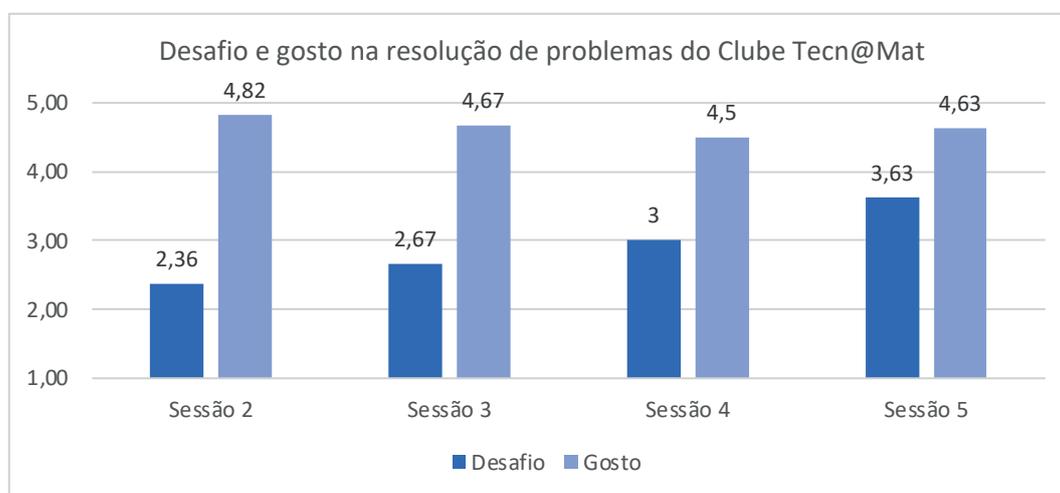


Figura 2. Valor médio do nível de desafio* e de gosto** sentido pelos participantes na resolução dos problemas em cada sessão do Clube Tecn@Mat.

* 1 – Muito fácil; 5 – Muito difícil. ** 1 – Não gostei nada; 5 – Gostei muito.

Relativamente ao nível de desafio experienciado pelos participantes, observou-se que este foi aumentando com o correr das sessões, passando de um valor médio de 2.36 na segunda sessão para 3.63 na última (Figura 2). Com efeito, na sessão 2, a maioria dos participantes resolveu o problema “As três casas” que envolve raciocínio analítico e dedutivo (Carreira et al., 2020) sendo que vários participantes reconheceram, durante a entrevista, que apreciam este tipo de problemas. O valor médio que caracteriza o desafio sentido na resolução de problemas da última sessão revela também a dificuldade sentida pelos participantes, embora se destaque que o gosto não diminuiu relativamente à sessão anterior e nem se alterou significativamente ao longo das várias sessões.

Nas entrevistas finais, a generalidade dos participantes considerou que o nível de desafio dos problemas propostos foi o adequado, embora alguns problemas tivessem sido considerados como mais acessíveis do que outros, tal como se ilustra a partir dos seguintes excertos:

Não foram muito difíceis, mas também não foram fáceis, está ali no meio. [FN, entrevista final]

Por exemplo, aquele das mesas, como eu estava a dizer, do restaurante, não foi assim muito fácil mas também não foi muito difícil . . . o das pizzas, esse eu até achei que foi fácil. [MP, entrevista final]

Sobre a utilização de tecnologias para resolver-e-exprimir problemas de matemática

Apesar de dominarem o uso de várias ferramentas tecnológicas, de conhecerem algumas que são habitualmente conotadas com Matemática (como a calculadora), e de já terem ouvido os seus professores falar noutras (como o Excel ou o GeoGebra), de um modo geral, estes alunos desconheciam formas úteis de as usar para resolver problemas e para expressar os seus raciocínios. Alguns explicaram que já usaram a folha de cálculo na disciplina de TIC, enquanto outros viram apresentações dos seus professores de matemática que continham figuras construídas no GeoGebra.

No questionário foi solicitado aos participantes que assinalassem o seu grau de concordância com várias afirmações relacionadas com o uso de tecnologias e/ou de papel-e-lápis em cada sessão do Clube. Observou-se que o uso do papel-e-lápis se reduziu, sobretudo entre a sessão 2 e as seguintes (Figura 3), à medida que os participantes foram progressivamente percebendo a utilidade do uso das ferramentas tecnológicas no desenvolvimento das suas abordagens, na obtenção da solução e na explicação dos raciocínios e procedimentos. Por outro lado, o uso de tecnologias aumentou à medida que os participantes passaram a perceber as suas potencialidades e a reconhecer a eficácia do seu uso, mas também por se sentirem mais confiantes na sua utilização para resolver-e-exprimir os problemas.

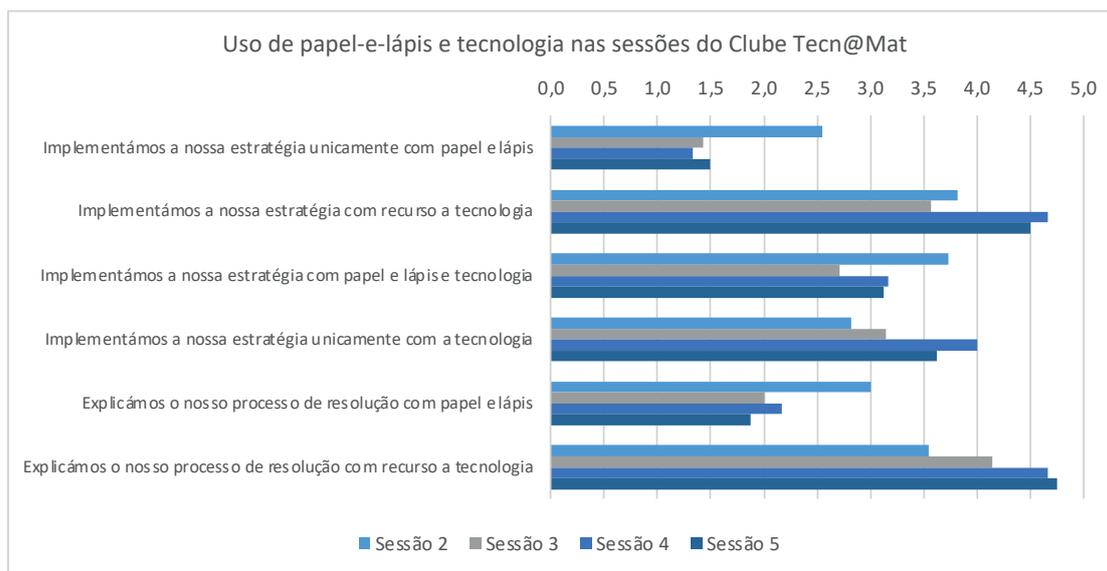


Figura 3. Nível médio de concordância* com cada uma das afirmações referentes ao uso de tecnologias e de papel-e-lápis para resolver problemas e exprimir soluções no Clube Tecn@Mat.

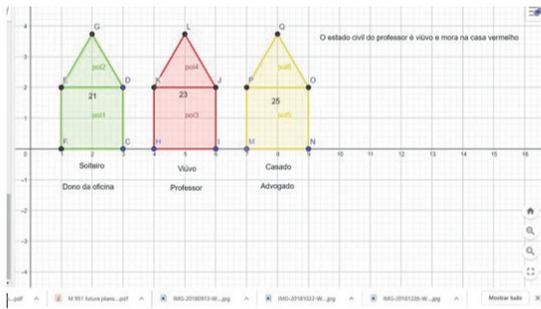
* 1 – Discordo; 2 – Discordo parcialmente; 3 – Nem discordo nem concordo; 4 – Concordo parcialmente; 5 – Concordo

Embora não tenham prescindido por completo do trabalho com papel-e-lápis, os participantes reconheceram a utilidade das tecnologias tanto para obter a solução dos problemas como para criar a sua explicação, sobretudo após os momentos de discussão em que diversas *affordances* das ferramentas eram abordadas e legitimadas para a resolução-e-expressão de problemas de matemática.

Acho que foi só na 1.^a vez que usámos papel-e-lápis. Sim. Eu acho que foi para visualizar mais facilmente o problema porque eu ainda não sabia como é que podia fazer com a tecnologia, mas depois se calhar percebi que com a tecnologia até seria mais simples. [CC, entrevista final]

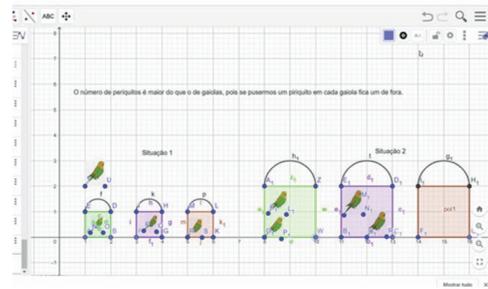
No meu caso eu, depois de fazer... e de a professora explicar como aquilo funcionava, eu comecei a preferir fazer no computador mas antes eu preferia no papel. [LC, entrevista final]

Uma vez que a demonstração das possibilidades de ação com novas ferramentas ocorria no último momento de cada sessão, pontualmente no primeiro da sessão seguinte, os participantes aproveitavam todas as oportunidades para explorar e fazer uso dos programas, ainda que nem sempre o fizessem de forma refletida. Por exemplo, o GeoGebra foi apresentado no final da 1.^a sessão de trabalho para ilustrar a sua utilidade na resolução dos dois desafios da sessão (ver Figura 1). Contudo, nas duas sessões seguintes os participantes que integravam a equipa 2 resolveram fazer uso do GeoGebra para criar representações das situações problemáticas em análise, ainda que a natureza dos desafios não fosse a mais adequada pois o desafio 4 envolvia raciocínio analítico e dedutivo, enquanto o desafio 5 envolvia relações numéricas e algébricas (Figura 4).



Em primeiro lugar tentámos descobrir as cores das casas, nós sabíamos que o advogado mora na casa amarela, que fica ao lado da vermelha e não da verde, logo sabemos que a casa vermelha estava no meio. A seguir descobrimos que o solteiro morava na casa 21 que não era amarela, ou seja tinha de ser a verde, seguidamente descobrimos que o dono da oficina não era casado nem viúvo, logo só poderia ser solteiro, também sabíamos que o viúvo morava ao lado da casa verde.

Por exclusão de partes descobrimos que o professor era viúvo e morava na casa vermelha.



De modo a que ficassem dois periquitos por gaiola nós escolhemos o número par 4 e dividimos esse número por gaiolas de modo a que ficassem dois periquitos por gaiola. Depois para que ficasse uma gaiola vazia acrescentamos uma gaiola à já duas gaiolas ocupadas.

Figura 4. Soluções do desafio 4 (à esquerda) e do desafio 5 (à direita) produzidas pela equipa 2.

Uma exigência enfatizada ao longo das sessões – e registada em cada desafio mediante o apelo “não se esqueçam de explicar o vosso processo de resolução!” (Figura 2) –, dizia respeito à elaboração de um relato descritivo dos procedimentos e dos raciocínios. Para além da exploração de ferramentas como o GeoGebra e o Excel, este aspeto foi um dos que marcou igualmente a aprendizagem destes participantes ao longo das sessões do Clube pois a criação de uma explicação coerente e detalhada do seu processo de resolução, incluindo uma justificação do raciocínio, era uma atividade que esteve praticamente ausente nas suas experiências de sala de aula de matemática. Faz-se notar que nem todos os participantes responderam do mesmo modo a esse apelo e alguns sublinharam a necessidade de recorrer ao papel e lápis para exprimir ideias:

[para explicar] o papel e lápis pode ser mais fácil porque podemos não estar tão habituados a projetar mais facilmente as nossas ideias, depois a tecnologia acho que é mais fácil aplicar a resolução do problema, mas sim... nós... eu não usei papel e lápis porque percebi que conseguia orientar-me com a tecnologia mas às vezes dá jeito até para fazer esquemas mais depressa. [CC, entrevista final]

A propósito da construção de uma boa explicação para uma solução de um problema do Clube, os participantes apontaram algumas características, destacando-se a clareza e a completude da resposta, aspetos que aparentam estar bastante centrados em experiências de sala de aula. Apesar da legitimação e do incentivo à construção e uso de diferentes representações e outputs digitais, com forte inspiração em diversas perspetivas teóricas (Carreira et al., 2016; Lesh e Doerr, 2003; Lesh e Harel, 2003), os participantes não os consideraram como parte integrante e indispensável de uma boa explicação das suas soluções:

Que tenha todos os passos... tem que ser bem explicada. Como diz a minha irmã mais velha: “explica isso como se estivesse a explicar a um miúdo de 5 anos”. Dizer a resposta. Eu acho que tem de ser completa. Ter uma sequência, não podemos fazer cálculos soltos. [LA, entrevista final]

Hum, primeiro [colocar] os tópicos com o que o problema tem . . . depois explicar o nosso processo de pensamento, depois ver se está tudo certo e acho que é só. [LC, entrevista final]

Quando questionados sobre os aspetos que mais apreciaram no Clube Tecn@Mat, as respostas dividiram-se em duas temáticas. Por um lado, os participantes salientaram a dimensão social do Clube pois gostaram de conhecer e trabalhar com alunos de outras regiões do país. Na entrevista final, uma jovem fez igualmente alusão ao seu sentimento de pertença a uma comunidade que aprecia fazer matemática como algo bastante positivo nesta experiência:

Eu acho que sempre é melhor assim porque acabamos por conhecer alunos de escolas de norte a sul do país e não só da escola onde eu ando. Apesar de eu não ser nada sociável e nada boa a trabalhar em grupo, acho que foi bom. Gostei de sentir que não estou sozinha. [LA, entrevista final]

Foi o utilizar a *drive*. Eu gostei [muito] de fazer as explicações e meter lá as imagens. [LC, entrevista final]

Eu achei giro estarmos com colegas de outras partes do país e... e conhecer ferramentas novas que eu não conhecia, e acho que foi isso. Os problemas também são mais giros do que os da escola. [CC, entrevista final]

Por outro lado, os participantes manifestaram apreço por algumas características inerentes ao Clube, nomeadamente, referindo a sua vertente tecnológica e a aprendizagem em torno da utilização de ferramentas específicas, mencionando também a natureza dos problemas propostos ao longo das sessões, que os dois excertos anteriores revelam. Estes fatores, que se podem apelidar de extrínsecos e intrínsecos, respetivamente, estão em sintonia com os resultados obtidos por Papanastasiou e Bottiger (2004), apoiando a ideia de que também os clubes de matemática são locais que possibilitam experiências matemáticas onde os fatores afetivos e cognitivos estão intimamente interligados.

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O *design* do Clube Tecn@Mat levou em linha de conta um conjunto de princípios informados por resultados de investigação em torno da atividade de resolução de problemas com tecnologias digitais, no âmbito de um campeonato online extraescolar, que, grosso modo, foram reconhecidos pelos participantes neste estudo exploratório.

Os problemas não rotineiros propostos encerram um nível de desafio matemático moderado (Carreira et al., 2016; Turner e Meyer, 2004). Com efeito, os participantes reconheceram diferenças entre os problemas do Clube e os que lhes são colocados em sala de aula, estes bastante mais alinhados com os conteúdos que estão a trabalhar num dado momento. Os problemas lançados nas sessões do Clube foram percecionados como mais desafiantes pois exigem a construção de uma estratégia e a seleção de ferramentas – matemáticas e tecnológicas – adequadas. Embora o nível de desafio sentido tivesse aumentado ao longo das sessões, isso não reduziu o gosto que experimentaram na procura das suas soluções, tendo os participantes considerado que o grau de dificuldade era adequado. O facto de se lançarem dois desafios e de se permitir que os participantes escolham o que preferem resolver, deixá-los mais confiantes de que conseguem obter uma solução.

Relativamente ao uso de tecnologias para resolver-e-exprimir os problemas, constatou-se que os participantes procuraram gradualmente apropriar-se de algumas ferramentas tecnológicas e tirar partido delas, quer para obter a solução dos problemas, quer para comunicar os seus procedimentos e raciocínios. Ao longo das sessões puderam explorar diversas *affordances* das ferramentas que apoiaram o pensamento matemático (e.g. GeoGebra, Excel), ou para comunicar de forma eficaz (e.g. aplicações Google, PowerPoint, editor de vídeo). De um modo geral, esta experiência de participação no Clube permitiu aos jovens aumentar o seu repertório de ferramentas tecno-matemáticas e ampliar o seu conhecimento acerca das potencialidades matemáticas da sua utilização. Neste sentido, e apesar da curta duração do Clube, é possível dizer que os jovens participantes iniciaram o desenvolvimento da sua Fluência Tecno-matemática que envolve conhecimento da tecnologia, conhecimento matemático mobilizável com essa tecnologia, e formas produtivas de os conjugar para produzir as soluções tecno-matemáticas dos problemas (Jacinto e Carreira, 2017a, 2017b, 2021).

Este desenvolvimento, ainda que embrionário, é consistente com a génese de jovens-com-media já que os participantes possuíam um conjunto de recursos matemáticos (conceitos, procedimentos) que

podiam mobilizar na resolução dos problemas, mas desconheciam diversas *affordances* das ferramentas tecnológicas. Embora conhecessem superficialmente algumas das tecnologias, nunca as tinham usado para desenvolver qualquer atividade matemática. Assim, é possível considerar que a emergência de coletivos de jovens-com-media ocorreu ao longo do Clube, ainda que de forma ténue. Isso ficou patente pela forma como se foram gradualmente desprendendo do papel e lápis e passaram a reconhecer algumas *affordances* matemáticas das ferramentas, e a explorar outras de forma mais independente.

Os resultados deste estudo de caso exploratório sugerem que a atividade matemática promovida no âmbito do Clube Tecn@Mat é consistente com práticas que apoiam o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, muito em particular, tirando partido de tecnologias digitais. Para além disso, constata-se que foi possível desenhar um currículo para o Clube com vista ao desenvolvimento da fluência tecno-matemática dos participantes sem que se transformasse num ambiente puramente instrucional. Por fim, espera-se que o conjunto de princípios teóricos subjacentes ao *design* do Clube Tecn@Mat, bem como as descrições de como foi implementado e conduzido, possam inspirar outros Clubes de Matemática baseados na resolução de problemas com tecnologias digitais.

Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia através de um Contrato de Estímulo ao Emprego Científico (CEECIND/01584/2017). Agradece-se a colaboração da Professora Doutora Susana Carreira que acompanhou as sessões do Clube como observadora externa. Agradece-se ainda aos participantes no estudo pela sua disponibilidade e envolvimento, bem como às professoras Joana, Luísa e Paula pela divulgação e por incentivarem os seus alunos a participar no Clube.

Referencias

- Aldon, G., Cusi, A., Schacht, F. e Swidan, O. (2021). Teaching mathematics in a context of lockdown: A study focused on teachers' praxeologies. *Education Sciences*, 11(2), 38. <http://dx.doi.org/10.3390/educsci11020038>
- Barron, B., Martin, C. e Roberts, E. (2007). Sparking self-sustained learning: report on a design experiment to build technological fluency and bridge divides. *International Journal of Technology and Design Education*, 17(1), 75-105.
- Borba, M. e Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. Springer.
- Carreira, S., Amado, N., Ferreira, R., Jacinto, H., Nobre, S. e Amaral, N. (2013). O Projeto Problem@Web: perspectivas de investigação em resolução de problemas. Em J. A. Fernandes, M. H Martinho, J. Tinoco e F. Viseu (Orgs.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 51-71). Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Carreira, S., Amado, N. e Jacinto, H. (2020). Venues for analytical reasoning problems: How children produce deductive reasoning. *Education Sciences*, 10, 169.
- Carreira, S. e Jacinto, H. (2019). A model of mathematical problem solving with technology: the case of Marco solving-and-expressing. Em P. Liljedahl e M. Santos Trigo (Eds.), *Mathematical Problem solving*, (pp. 41-62). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_3
- Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H. e Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematics problems with technology*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-24910-0>
- Chan, M. C. E. e Clarke, D. (2017). Structured affordances in the use of open-ended tasks to facilitate collaborative problem solving. *ZDM Mathematics Education*, 49, 951–963.

- Drijvers, P., Thurm, D., Vandervieren, E., Klinger, M., Moons, F., van der Ree, H., Mol, A., Barzel, B. e Doorman, M. (2021). Distance mathematics teaching in Flanders, Germany, and the Netherlands during COVID-19 lockdown. *Educational Studies in Mathematics*, 108, 35-64. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10094-5>
- Durbin, J. M. (2020). An examination of effects of student math extracurricular participation on math self-efficacy and proficiency. *Journal of Higher Education Theory and Practice*, 20(9), 121-126. <https://doi.org/10.33423/jhetp.v20i9.3643>
- Geiger, V. (2005). Master, servant, partner and extension of self: a finer grained view of this taxonomy. Em P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce e A. Roche (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice*. MERGA.
- Hoyles, C., Noss, R., Kent, P. e Bakker. A. (2010). *Improving mathematics at work: The need for techno-mathematical literacies*. Routledge.
- Jacinto, H. (2017). *A atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias e a fluência tecno-matemática de jovens do século XXI*. Unpublished doctoral thesis. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Jacinto, H. e Carreira, S. (2017a). Mathematical problem solving with technology: The techno-mathematical fluency of a student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(6), 1115–1136. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8>.
- Jacinto, H. e Carreira, S. (2017b). Different ways of using GeoGebra in mathematical problem-solving beyond the classroom: Evidences of techno-mathematical Fluency. *Bolema*, 31(57), 266-288. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13>
- Jacinto, H. e Carreira, S. (2021). Digital tools and paper-and-pencil in solving-and-expressing: How technology expands a student's conceptual model of a covariation problem. *Journal on Mathematics Education*, 12(1), 113-132. <http://doi.org/10.22342/jme.12.1.12940.113-132>
- Jacinto, H., Carreira, S. e Mariotti, M. A. (2016). Mathematical problem solving with technology beyond the classroom: The use of unconventional tools and methods. Em C. Csíkos, A. Rausch e J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 27-34). PME.
- Kalogeropoulos, P., Roche, A., Russo, J., Vats, S. e Russo, T. (2021). Learning mathematics from home during COVID-19: Insights from two inquiry-focussed primary schools. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(5), 1957. <https://doi.org/10.29333/ejmste/10830>
- Lesh, R. e Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. Em R. Lesh e H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Erlbaum Associates.
- Lesh, R. e Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2-3), 157-189. <https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679998>
- Lesh, R. e Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. Em F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 763-804). Information Age Publishing and NCTM.
- Papanastasiou, E. C. e Bottiger, L. (2004). Math clubs and their potentials: Making mathematics fun and exciting. A case study of a math club. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(2), 159-171. <https://doi.org/10.1080/00207390310001638395>

- Papert, S. e Resnick, M. (1995). *Technological fluency and the representation of knowledge*. [Proposal to the National Science Foundation]. MIT Media Laboratory.
- Saadati, F. e Felmer, P. (2021). Assessing impact of a teacher professional development program on student problem-solving performance. *ZDM Mathematics Education*, 53, 799-816. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01214-1>
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schweinle, A., Berg, P. J. e Sorenson, A. R. (2013). Preadolescent perceptions of challenging and difficult course activities and their motivational distinctions. *Educational Psychologist*, 33(7), 797-816. <https://doi.org/10.1080/01443410.2013.785049>
- Sinclair, N. (2020). On teaching and learning mathematics–technologies. Em Y. Kolikant, D. Martinovic e M. Milner-Bolotin (Eds.), *STEM Teachers and Teaching in the Digital Era* (pp. 91-107). Springer.
- Stahl, G. (2009) (Ed.). *Studying virtual math teams*. Springer.
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Sage.
- Stott, D., Baart, N. e Graven, M. (2019). Partnering with districts to expand an after-school maths club programme. *Africa Education Review*, 16(6), 183-200. <https://doi.org/10.1080/18146627.2018.1464690>
- Turner, J. e Meyer, D. (2004). A classroom perspective on the principle of moderate challenge in mathematics. *Journal of Educational Research*, 97(6), 311-318. <http://dx.doi.org/10.3200/JOER.97.6.311-318>
- Yao, X. e Manouchehri, A. (2019). Middle school students' generalizations about properties of geometric transformations in a dynamic geometry environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55, 1-19. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.04.002>