INVENCIÓN DE PROBLEMAS Y SENTENCIAS COMO MEDIO PARA EVIDENCIAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Invention of Problems and Sentences as a Means of Evidence of Algebraic Thinking in Elementary Education

Ayala-Altamirano, C.[a], Pinto, E.[b], Molina, M.[c] y Cañadas, M.C.[d]

[a]Universidad de Málaga (España), [b]Universidad de O'Higgins (Chile), [c]Universidad de Salamanca (España), [d]Universidad de Granada (España)

Resumen

El objetivo de este trabajo es describir, desde las perspectivas estructural y analítica, los saberes algebraicos que manifiestan niños de 9-10 años cuando resuelven tareas de invención de sentencias y problemas en el contexto del algebra temprana. Para esto estudiamos los resultados de un experimento de enseñanza implementado durante dos semanas. Analizamos las discusiones orales y las producciones escritas de los niños asociadas a dos tareas: inventar sentencias numéricas e inventar historias matemáticas. Los resultados muestran que, en ambas tareas, ellos representan con letras las cantidades desconocidas y operan con estas como si las conocieran. Además, razonan sobre las estructuras involucradas en las sentencias o historias creadas. Concluimos que la invención tiene un gran potencial para observar y fomentar el pensamiento algebraico. Los niños no centraron su atención en el cálculo, lo que ayudó a evidenciar su comprensión sobre contenidos algebraicos.

Palabras clave: *cantidades desconocidas, invención, pensamiento estructural, pensamiento analítico, sentido algebraico.*

Abstract

The aim of this paper is to describe, from the structural and analytical perspectives, the algebraic knowledge manifested by 9-10 years-old children when solving sentence and problem invention tasks in the context of early algebra. For this purpose, we study the results of a teaching experiment implemented for two weeks. We analysed the children's oral discussions and written productions associated with two tasks: inventing number sentences and inventing mathematical stories. The results show that, in both tasks, they represent unknown quantities with letters and operate with these as if they knew them. In addition, they reason about the structures involved in the sentences or stories created. We conclude that invention has a great potential for observing and fostering algebraic thinking. Children did not focus their attention on computation which helped to evidence their understanding of algebraic content.

Keywords: *unknown quantities, invention, structural thinking, analytical thinking, algebraic sense*

INTRODUCCIÓN

La invención en el aula de matemáticas ha sido ampliamente estudiada desde la perspectiva de la invención de problemas. De modo general, la invención se ha considerado como una oportunidad para fomentar el pensamiento flexible y conducir a una comprensión profunda de los contenidos matemáticos (Baumanns y Rott, 2022). Desde la perspectiva de los docentes, la invención puede ser un medio para evaluar las concepciones y capacidades de los estudiantes con respecto a un tópico en particular (Ayllón, et al., 2010; Cai y Hwang, 2020; Cañadas et al., 2018; Castro, 2011) y permite conocer las capacidades de los estudiantes para utilizar sus conocimientos matemáticos. En esta comunicación abordaremos la idea de invención desde la perspectiva del pensamiento algebraico; nuestro interés va más allá de la invención de problemas. Buscamos indagar cómo estudiantes de

Ayala-Altamirano, C., Pinto, E., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Invención de problemas y sentencias como medio para evidenciar el pensamiento algebraico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 155–162). SEIEM.

primaria inventan sentencias numéricas e historias matemáticas[1] al interactuar con contenidos algebraicos.

Kieran (2022) señala que el pensamiento algebraico suele ser estudiado desde tres perspectivas: el pensamiento analítico, el pensamiento estructural y el pensamiento funcional; siendo la generalización el hilo conductor de las tres. El pensamiento analítico, entre otras cosas, se centra en tratar las cantidades desconocidas como si fueran conocidas (Radford, 2018). El pensamiento estructural se centra en ver y expresar la estructura y las propiedades de los números, las operaciones y las expresiones (Mason et al., 2009). El pensamiento funcional implica generalizar las relaciones entre cantidades que covarían (Blanton et al., 2018).

Diferentes currículos incluyen al pensamiento algebraico desde los primeros cursos. Por ejemplo, en la actualización del currículo español de educación primaria (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022), el sentido algebraico engloba saberes directamente relacionados con el pensamiento analítico y estructural. Estos están asociados con la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas. Desde el primer ciclo se espera que los estudiantes expresen relaciones de igualdad entre expresiones que incluyan operaciones. Por otra parte, diferentes investigaciones han estudiado el desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria, dando cuenta de su importancia y las diversas formas de promoverlo en el aula (Kieran, 2022). A pesar de los esfuerzos, todavía quedan desafíos sobre cómo introducirlo.

El objetivo de este trabajo es describir qué saberes algebraicos manifiestan niños de 9-10 años cuando inventan expresiones que involucran relaciones de igualdad y propiedades aritméticas y cuando inventan historias para expresiones que implican igualdades expresadas con simbolismo algebraico. En este estudio nos centramos en la invención para discutir su rol en el desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria, centrándonos en el pensamiento analítico y el pensamiento estructural.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO E INVENCIÓN

En este trabajo concebimos el pensamiento algebraico como aquel que refiere a cantidades indeterminadas (incógnitas, variables, parámetros o números generalizados), y trata dichas cantidades de forma analítica, es decir, aunque las cantidades sean desconocidas, se suman, restan, multiplican o dividen, como si fueran conocidas (Radford, 2018). Al pensar algebraicamente, se razona sobre la generalidad, se percibe una estructura algebraica a partir del estudio de relaciones en las operaciones y se estudian los cambios entre las cantidades involucradas (Kieran, 2004).

El pensamiento algebraico puede ser abordado desde distintos enfoques (Blanton et al. 2018). En este trabajo nos centramos en dos enfoques: (a) el de la aritmética generalizada, donde las operaciones aritméticas se usan como contenido para desarrollar pensamiento algebraico, y se focalizan en sus propiedades; y (b) en el enfoque de las igualdades, expresiones, ecuaciones e inecuaciones, donde se busca desarrollar una comprensión relacional del signo igual, así como razonar y establecer la equivalencia entre distintas expresiones en términos generales, y plantear y resolver ecuaciones e inecuaciones (Blanton et al., 2018). Además, en el estudio de estos enfoques se pretende fomentar el pensamiento relacional, lo que implica considerar las expresiones desde una perspectiva estructural, en lugar de como procesos que se deben seguir paso a paso (Molina, 2009).

Stoyanova y Ellerton (1996) describen la invención como un proceso por el cual, sobre la base de la experiencia matemática, los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos significativos. Basándonos en las ideas de Stoyanova (2000) distinguimos tres categorías de tareas de invención: (a) situaciones libres, (b) situaciones semi-estructuradas y (c) situaciones estructuradas. En la primera, los estudiantes no tienen

[1] Inventar una historia lo entendemos como el proceso de contextualización de una expresión simbólica empleando lenguaje natural (escrito o hablado).

restricciones para inventar y se les presenta una situación amplia como, por ejemplo, pedir que inventen problemas que sean fáciles o difíciles. En las situaciones semiestructuradas hay una situación en la que se propone explorar una estructura y completarla aplicando su experiencia matemática previa como, por ejemplo, pedir que propongan una situación que se resuelva con un cálculo dado. Por último, las situaciones estructuradas, son aquellas en las que se reformulan situaciones dadas o se cambia alguna condición de la misma o se pide que se complete dadas ciertas alternativas. Dado el alcance de esta comunicación, en este estudio nos centramos en la primera y segunda categoría de invención.

Desde la perspectiva del pensamiento algebraico, Molina (2006) analiza la invención de sentencias numéricas por estudiantes de tercero de primaria. Los estudiantes ponen de manifiesto los significados que asignan al signo igual (operador, expresión de una acción, equivalencia numérica, o similitud numérica) tras haber trabajado con sentencias numéricas basadas en propiedades aritméticas de la suma y la resta. También se observa que los alumnos inventan sentencias basadas en las propiedades trabajadas y asocian la magnitud de los números con la dificultad, aunque el número tuviera muchas cifras que fueran ceros. Investigaciones relacionadas con situaciones semiestructuradas, tales como la traducción del simbolismo algebraico al lenguaje natural en el contexto de la invención, concluyen que este tipo de tarea lleva asociada una alta demanda cognitiva; el inventor del problema debe reflexionar sobre la estructura de la situación más que sobre los procedimientos de resolución del problema (Cai et al., 2013). Se ha demostrado que plantear problemas a partir de ecuaciones o cálculos matemáticos dados requiere comprender el significado de las operaciones (Christou et al., 2005). Además, en este tipo de tareas los alumnos tienden a seguir un proceso algorítmico centrado en la estructura operativa más que semántica de los problemas (English, 1998).

METODOLOGÍA

Los datos que aquí presentamos proceden de una actividad extraescolar realizada en verano, durante dos semanas del periodo de vacaciones y de manera virtual (dada la COVID-19). Esta actividad estuvo compuesta por 10 sesiones. El objetivo de la actividad fue promover que los niños expresaran y justificaran las ideas matemáticas generales encontradas al trabajar con diferentes contenidos de carácter algebraico. Las sesiones las diseñaron e implementaron los autores de este trabajo con el apoyo de los profesores de matemática habituales de los niños y profesores colaboradores. La actividad extraescolar está descrita en detalle en Pinto et al. (2023).

Asistieron 21 niñas y niños chilenos que acababan de terminar 4º de primaria (9-10 años). Los asistentes pertenecían a dos colegios diferentes y fueron seleccionados con la ayuda de sus profesores de matemáticas, bajo los siguientes tres criterios (a) paridad de género (10 niñas y 11 niños); (b) disposición a trabajar durante el verano; y (c) diferentes ritmos de aprendizaje.

Diseño general de las sesiones

La expresión y justificación de ideas matemáticas generales fue el eje transversal de la actividad extraescolar. En la primera y la última sesión evaluamos los conocimientos de los alumnos relativos a las prácticas del pensamiento algebraico: generalizar, representar, justificar y razonar sobre la generalización. Las sesiones 2 a la 9 abordamos diferentes enfoques al pensamiento algebraico: aritmética generalizada (sesiones 2, 3 y 4); equivalencia, expresiones y ecuaciones (sesiones 5 y 6); y pensamiento funcional (sesiones 7, 8 y 9). Organizamos cada sesión en tres bloques: (a) búsqueda de regularidades y desarrollo de una conjetura; (b) articular una afirmación general a través de diferentes representaciones; y (c) extender lo aprendido a otros casos. Una de las razones por las que seguimos esta organización fue proporcionar distintos espacios de cooperación, confrontación y discusión de ideas y para esto nos inspiramos en las ideas de Russell et al. (2017).

Tareas de invención

Las tareas de invención tenían el objetivo de evaluar la comprensión de los niños sobre las temáticas asociadas a los enfoques de aritmética generalizada y equivalencia, expresiones y ecuaciones.

La primera tarea de invención la propusimos en el tercer bloque de la última sesión de aritmética generalizada. Les pedimos que inventaran sentencias (no se dijo de qué tipo) fáciles y difíciles. Previamente, los niños habían generalizado en lenguaje natural lo que sucede al sumar números pares e impares (sesión 2). Luego, en las sesiones 3 y 4 se discutió sobre el significado del signo igual a partir del análisis de diferentes sentencias numéricas y algebraicas. La diferencia entre ambas sesiones fue el tipo de representación matemática trabajada. En la sesión 3 abordamos las sentencias numéricas solo con representaciones simbólica-numérica (p. ej., 14 + 5 = 5 + 12 y 450 + 20 = 320 + 450), mientras que en la sesión 4 se introdujo, por primera vez, la letra como una representación útil para expresar la generalización de propiedades aritméticas (p. ej., a + 23 = 23 + a y a + b = b + a). En este caso, la letra fue introducida explicando que se empleaba para representar un número natural cualquiera. Las propiedades aritméticas de la adición involucradas en ambas sesiones fueron las mismas (conmutativa, asociativa, compensación[2] y complementaria de la suma y la resta[3]).

La segunda tarea de invención se presentó al cierre de las sesiones relativas a equivalencia, expresiones y ecuaciones. En las sesiones 5 y 6, los niños habían analizado diversos textos en los que se describían historias matemáticas que ellos debían relacionar con ecuaciones dadas. Por ejemplo: "Había 32 personas en una sala. Algunas personas estaban sentadas y otras 12 estaban de pie". Los niños debían escoger cuál de las siguientes expresiones se relacionaba con la historia: 32=m+12; 32+m=12; 32+12=m. En el último bloque de la sesión 6, les pedimos a los niños que inventaran una historia matemática que se asociara con la expresión 25+u=45. Luego compartieron las historias y entre ellos evaluaron su pertinencia.

Análisis

Analizamos las respuestas de los niños a ambas tareas de invención (de sentencias e historias matemáticas) desde las perspectivas estructural y analítica (Kieran, 2022). Lo estructural tiene distintos significados según el enfoque del álgebra con el que se relacione (Molina y Cañadas, 2018). En el caso de las sentencias, nos centramos en la estructura sintáctica de las mismas. Fueron analizadas considerando la propiedad subyacente, las operaciones implicadas, la cantidad de términos de las expresiones, el uso del signo igual y la representación de cantidades desconocidas. En el caso de las historias matemáticas, la estructura se relaciona con el significado de las operaciones implicadas (las estructuras semántica y sintáctica del problema) (Molina y Cañadas, 2018). Más específicamente, para analizar las historias inventadas, las tradujimos al simbolismo algebraico manteniendo una congruencia de izquierda a derecha siempre que fue posible (p. ej., "Tengo una bolsa con 25 manzanas rojas y algunas verdes, en total tengo 45 manzanas", se traduce como 25+u=45. Luego comparamos la traducción obtenida con la ecuación propuesta. También identificamos si los niños proponían un contexto nuevo o adaptaban las historias propuestas en los bloques anteriores. Para analizar la estructura semántica de las historias con estructura aditiva empleamos la propuesta por Carpenter y Moser (1983) y clasificamos las historias como: cambio creciente, cambio decreciente o combinación.

La perspectiva analítica la asociamos al modo como se refieren a cantidades desconocidas y razonan refiriéndose a estas. Para esto, analizamos las discusiones orales que tuvieron lugar en las puestas en común y los registros escritos de las historias que inventaron. Buscamos términos que los niños usaron para referirse a cantidades desconocidas como, por ejemplo, adjetivos indefinidos (e.g. poco,

[2] P. ej., $a + b = (a - c) + (b + c)$ siendo a, b y c números naturales con $a > c$. Esta propiedad también se denomina invarianza (Molina, 2006).
[3] $a + b - b = a$ y $a - b + b = a$, siendo a y b números naturales y, en la segunda expresión, $a > b$ (Molina, 2006).

mucho, un, otro, demasiadas, misma, algún, ninguna, cualquiera) y frases claves como “es número que no conocemos”, “es el número que quieras”, entre otras.

RESULTADOS

Presentamos resultados generales de dos tareas de invención, incluyendo algunos fragmentos de entrevistas. Usamos nombres ficticios de los niños para resguardar su anonimato.

Tarea 1: inventar sentencias numéricas

Los niños propusieron sus propias sentencias numéricas, clasificándolas como fáciles o difíciles. Desde una perspectiva estructural, observamos que todos los ejemplos inventados, tanto fáciles como difíciles, son expresiones que contienen el signo igual, operaciones en ambos miembros y cantidades desconocidas. En la tarea no se especificó el uso de letras, no obstante, todos la emplearon. Doce de 18 sentencias involucraron una única letra (a, b, c, d, x), 5 de 18, emplearon dos letras y un caso, clasificado como difícil, empleó cuatro letras. En la mayoría de las expresiones inventadas (12 de las 18) identificamos estructuras asociadas alguna propiedad aritmética. En este caso fueron: propiedad conmutativa de la adición (2 de 18), propiedad asociativa de la adición (8 de 18) y compensación (2 de 18). En la tabla 1, mostramos ejemplos para cada caso.

Tabla 1. Ejemplos de sentencias inventadas

Propiedad	Clasificación	
	Fácil	Difícil
Conmutativa	a+23=23+a	30+40+25+c=40+25+30+c
Asociativa	a+14=a+10+4	1234+a=10000+200+40+3+a
	80+b=a+40+40	x+1.200+145=145+1.000+200+x
Compensación	b+32=a+31	
	63+a=62+a	
No se observa	a+1+35=34+8+x	a+342+24+2+4+=x2+3343+42+4+n+e

Observamos que algunas sentencias involucran la descomposición canónica de algún número, por tanto, están haciendo alusión a la estructura de los números naturales, por ejemplo: a+14=a+10+4 y x+1.200+145=145+1.000+200+x. Sobre el grado de dificultad, observamos que este no tiene relación con la propiedad involucrada, más bien con la cantidad de sumandos y con el rango numérico.

Desde la perspectiva analítica del álgebra, observamos que los niños se refieren a las letras como cantidades desconocidas y operan con estas como si las conocieran. Esto lo ejemplificamos en un fragmento de la entrevista en la que se pregunta si la sentencia 29+a=30+b es verdadera o falsa.

1. José: Yo opino que es falso, porque, aunque los números son cercanos, las letras no son iguales y los números tampoco, así que es falso.
2. Investigadora: ¿Estás de acuerdo Hugo?
3. Hugo: Si estoy de acuerdo, porque está todo… así como diferente. Entonces… al estar diferente le pasa eso. Aunque si la A o la B fueran la misma, igual sería falsa porque el 29 y el 30 no son iguales.
4. Investigadora: ¿Qué dices Alonso?
5. Alonso: Depende de cuánto valga el número. Por ejemplo, si la A vale uno más que B, entonces sería verdadera. Pero como no sabemos, yo puse que es falsa, aunque puede estar bien.

Observamos que los niños lograron establecer la equivalencia entre las expresiones en términos generales. José y Hugo argumentaron que es falsa, estableciendo relaciones entre los términos de cada expresión. Luego Alonso dice que “depende”, que también puede ser verdadera (línea 5). Alonso nota que 30 es uno más que 29, por lo que, si las letras también están relacionadas de esa forma, la relación sería verdadera. Observamos que los niños manifestaban pensamiento relacional.

Tarea 2: inventar historias matemáticas

Esta tarea consistió en contar una historia que se relacionara con la ecuación 25+u=45. Desde la perspectiva estructural sintáctica, observamos que la mayoría de los niños crearon historias matemáticas coherentes con la estructura de la ecuación dada (14 de 21). De los seis que respondieron incorrectamente, dos niños inventaron historias cuyas ecuaciones involucraban dos operaciones (p.ej. (45+25):20=u), tres crearon historias cuya ecuación incluía una suma, pero las cantidades involucras no eran las dadas (p.ej. 25+20=u) y un niño inventó una historia cuya ecuación incluía una resta y no representaba la cantidad desconocida (45–20=25). Un niño no respondió.

Sobre la estructura semántica de los problemas, seis niños adaptaron los problemas que previamente los investigadores habían presentado (todos correctos) y 14 niños presentaron contextos nuevos (ocho correctos). Quienes respondieron correctamente propusieron problemas de combinación y problemas de cambio creciente (Ver tabla 2).

Tabla 2. Clasificación de las historias inventadas

		Tipo de problema						
		Cambio creciente			Cambio decreciente	Combinación		Otros
Tipo de invención	Nº	Incógnita en cantidad inicial	Incógnita en cambio	Incógnita en cantidad final	Sin incógnita	Incógnita en una parte	Incógnita en el total	
Correcta	14	3	4			7		
Incorrecta	6				1	2	1	2

Desde la perspectiva analítica, todos los que inventaron historias correctas se refirieron a cantidades indeterminadas. A diferencia de la tarea previa, en este caso el desafío estaba en expresar el significado de la cantidad desconocida en contexto cotidiano y llegar a verbalizarlo. Las niñas y niños emplearon diferentes expresiones, tales como: no sabe cuántos tiene, un número indefinido de, otros, algunos, una y hartos. Un ejemplo de historia es el siguiente: "Tengo una caja con 45 queques[magdalenas]. Unos de vainilla y 25 de chocolate. ¿Cuántos queques de vainilla tengo?". A Martín le preguntamos si la historia contaba lo mismo que la ecuación. Él dijo que sí. En su argumento reconoce que la letra debe estar asociada a un número desconocido. Él dijo: "trae el número que no sabemos, que es la *u*, trae el 25 y el 45 que son los números que conocemos".

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo fue describir qué saberes algebraicos manifiestan niños de 9-10 años cuando inventan expresiones que involucran relaciones de igualdad y propiedades aritméticas, y cuando inventan historias para expresiones que involucran igualdades. Nos centramos en la invención para discutir su rol en el desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria, desde las perspectivas del pensamiento analítico y estructural.

En nuestro caso observamos que los niños participantes, sin importar los contenidos algebraicos abordados, evidenciaron pensamiento algebraico al referirse a cantidades desconocidas (números generalizados e incógnitas), y tratar dichas cantidades de forma analítica. También percibieron una estructura algebraica al inventar sentencias de igualdad e inventar un contexto para la ecuación dada.

Las tareas de invención fueron presentadas al final del trabajo de cada enfoque, con el objetivo de evaluar la comprensión de los niños sobre las temáticas tratadas. Investigaciones previas notan que los contenidos o la tipología de tarea previamente trabajadas afectan a los problemas inventados por los estudiantes (Ayllón, et al., 2010; Torregrosa et al., 2021). En este trabajo observamos que los participantes inventaron sentencias empleando las mismas propiedades propuestas en ejemplos previos y que algunos niños adaptaron las historias matemáticas propuestas previamente. Esto evidencia que la invención se basa en casos previos, por lo que destacamos la importancia de presentar variedad de casos en las propuestas de intervención en el aula.

También la invención proporcionó información sobre la percepción del grado de dificultad que tienen los niños sobre las tareas de crear sentencias. En este caso, lo fácil o difícil no venía dado por la propiedad empleada o el empleo o no de cantidades desconocidas. Para este grupo de niños, la dificultad estaba determinada por el rango numérico y el número de sumandos, de modo similar que los resultados de Molina (2009). La mitad de las historias que crearon estaban asociadas a problemas de cambio creciente cuya incógnita está en la cantidad inicial o en la cantidad de cambio, investigaciones previas señalan que este tipo de problemas supone una mayor dificultad para los estudiantes (Alsina et al., 2018), no obstante, en este estudio no se les preguntó a los estudiantes sobre su percepción de la dificultad de sus historias. Por lo tanto, una línea futura de investigación es indagar sobre esta percepción. Ayllón et al. (2011) señala que la dificultad puede estar relacionada con la capacidad para entender el enunciado, el conocimiento de los conceptos involucrados, los datos (muchos números o números altos) o a la cantidad de etapas necesarias para obtener la respuesta.

También destacamos que en las tareas los niños no centraron su atención en el cálculo. Según los hallazgos previos, los estudiantes suelen seguir un proceso algorítmico centrado en la estructura operativa de la ecuación (Cai et al., 2013; English, 1998). Atender a la estructura y generalizarla, más que centrarse en el cálculo, ayuda a ser matemáticamente exitoso (Blanton et al., 2018).

Concluimos que la invención tiene un gran potencial para fomentar el pensamiento algebraico y evidenciar la comprensión de los estudiantes sobre contenidos algebraicos. Nuestra contribución muestra una forma de analizar las respuestas de los estudiantes, centrándonos en las perspectivas estructural y analítica. También evidenciamos razonamientos sofisticados cuando abordan la generalidad en dos contextos algebraicos distintos.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto FONDECYT Iniciación 11220843, financiado por ANID, Chile; y Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/, España.

Referencias

Alsina, A., Liñán-García, M. M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). El número y las operaciones matemáticas en Educación Infantil. En M. de la C. Muñoz y J. Carrillo (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 81-144). Paraninfo Universidad.

Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 223-233). SEIEM.

Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema "difícil" por alumnos de Educación Primaria. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco, M. M. Palarea, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 277-286). SEIEM.

Baumanns, L. y Rott, B. (2022). Developing a framework for characterising problem-posing activities: A review. *Research in Mathematics Education*, *24*(1), 28-50. https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1897036

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101391. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B. y Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 57-69. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9429-3

Cañadas, M. C., Molina, M. y Del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics, 98*, 19-37. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9

Carpenter, T. y Mosser, J. (1983). The adquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: concepts and processes* (pp.7-44). Academic Press.

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 1-15). Universidad de Granada.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM–Mathematics Education*, *37*(3), 149-158. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0004-6

English, L. D. (1998). Children's Problem Posing within Formal and Informal Contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 83-106. https://doi.org/10.2307/749719

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(6), 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32. https://doi.org/10.1007/BF03217543

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2022). Real Decreto 157/2022 de 01 de marzo, por el que se establece la ordenación y enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 52*, 24386-24504.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*.[Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA, 3(3), 135-156.*

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(1), 149-173. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in Primary School. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Springer.

Russell, S. J., Schifter, D., Kasman, R., Bastable, V. y Higgins, T. (2017). *But why does it work? Mathematical argument in the elementary grades.* Heinemann.

Stoyanova, E. (2000). Empowering students' problem solving via problem posing: The art of framing "good" questions. *Australian Mathematics Teacher*, *56*(1), 33-37.

Stoyanova, E. y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. *Technology in Mathematics Education*, *4*(7), 518-525.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Resolución e invención de problemas: La estrategia de resolución con relación al problema inventado. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 595-602). SEIEM.