TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS NO ESPECIALISTAS

Techniques for solving proportionality problems by non-specialist university students

Gonzales, C. y Wilhelmi, M. R.

Universidad Pública de Navarra

Resumen

El objetivo de esta investigación es analizar la relación entre números, cantidades y magnitudes en la resolución de problemas de proporcionalidad por estudiantes universitarios en Ciencias de la salud. Se definen variables operatorias tomando como base la noción de campo conceptual de estructuras multiplicativas. La muestra es de 80 estudiantes y las respuestas se analizan por un método mixto. Se concluye que la falta de significado por el uso preponderante de la regla de tres simple, sugiere un cambio en la enseñanza que promueva estrategias de tipo funcional en el manejo de la proporcionalidad.

Palabras clave: *proporcionalidad, regla de tres, relaciones escalar y funcional, cantidades extensiva e intensiva.*

Abstract

The aim of this research is to analyse the relationship between numbers, quantities and magnitudes in the resolution of proportionality problems by university students in Health Sciences. Operational variables are defined based on the notion of the conceptual field of multiplicative structures. The sample is 80 students and the answers are analysed by a mixed method. It is concluded that the lack of meaning due to the preponderant use of the simple rule of three suggests a change in teaching that promotes functional strategies in the handling of proportionality.

Keywords: *proportionality, rule of three, scalar and functional relationships, extensive and intensive quantities*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se encuadra en la formación matemática en carreras de Ciencias de la Salud, que es considerada en el ámbito de didáctica como *no especialistas* (Romo-Vázquez y Artigue, 2023). En esta formación hay aspectos y contenidos cuyas dificultades pasan desapercibidas. En particular, en los primeros años de universidad se asumen contenidos escolares como "conocidos" o "comprendidos". En esta categoría, estaría el uso y compresión de *cantidades intensivas y extensivas* (Schwartz, 1988). Artaud et al. (2022) muestran que las situaciones de proporcionalidad esconden diferentes tratamientos (que privilegian el uso de números o de magnitudes). Asimismo, los investigadores asocian a estos tratamientos diferentes instrumentos o representaciones (tabla de proporcionalidad, reducción a la unidad, regla de tres, función lineal) que se identifican con diferentes etapas educativas (Wilhelmi, 2017).

La proporcionalidad aborda campos matemáticos y didácticos amplios y, por lo tanto, es necesario estudiar los efectos del cambio de significado de la noción en la actividad matemática de los estudiantes y en la forma de gestión del proceso instruccional por los docentes (Bourgade, 2020; Castillo y Burgos, 2022; Castillo y Fernández, 2022; Chambris y Visnovska, 2021; Comin, 2002;

Gonzales, C. y Wilhelmi, M. R. (2023). Técnicas de resolución de problemas de proporcionalidad por estudiantes universitarios no especialistas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 283–290). SEIEM.

Gairín y Oller-Marcén, 2012). Además, es necesario contextualizar el uso de la noción en contextos profesionales propios, tal y como sucede en Ciencias de la Salud (Barrera y Santos, 2000; García-Oliveros et al., 2009; Hoyles et al., 2001; Noss et al., 2002). Así, por ejemplo, Castro (2019) explicita como la proporcionalidad juega un papel clave como: a) *variable de bloqueo* y *representatividad de la muestra* (“la muestra puede quedar desequilibrada, si no se toman en cuenta los subgrupos y su peso ponderado o proporcional respecto a la población de estudio”, p. 54); b) estadístico en contraste de hipótesis sobre proporciones, en el análisis de la incidencia de una afección a distintos colectivos.

En el contexto de la formación inicial en Enfermería, Roditi (2012) muestra la influencia de las estrategias docentes en la resolución de problemas. En particular, como el “cálculo sistemático” basado en la regla de tres en tareas de proporcionalidad reduce la tasa de fracaso. Esta regla se sigue de diversos procedimientos *analógicos* (mediante el uso de operadores escalares) o *analíticos* (mediante operadores funcionales o el uso del coeficiente de proporcionalidad). Sin embargo, Roditi no valora el sentido que los estudiantes otorgan a esa técnica estandarizada ni el control que ejercen sobre sus resultados. ¿Qué impacto tiene esta ausencia de significado y de control en la valoración de las respuestas y en la comprensión de las situaciones-problema? Aviña-González et al. (2019) muestran cómo estudiantes de medicina presentan también problemas a la hora de resolver problemas de proporcionalidad cercanos a la vida cotidiana y cómo “el proceso de desarrollo del conocimiento de proporcionalidad por los […] estudiantes fue […] continuo [… De hecho,] el significado del concepto (objeto, evento o situación) lo fueron construyendo al relacionarlo con otros conceptos, en su forma de operar o funcionar, en los usos que pudieron hacer con ellos” (p. 84).

Raviolo et al. (2022) determinan que los universitarios de primer año que estudian la asignatura de Química no comprenden la noción de la proporcionalidad a pesar de que las respuestas que brindan sean correctas. Hallaron que los estudiantes emplean la regla de tres como proceso algorítmico. Además, identificaron que más de la mitad de los alumnos no logran obtener un conocimiento conceptual profundo de concentración expresada en la unidad (g/L). Asimismo, concluyeron que los estudiantes presentan problemas en reconocer la naturaleza de las cantidades extensivas e intensivas.

Por todo ello, se plantea la siguiente pregunta: ¿qué comprensión, lenguajes y procedimientos tienen estudiantes de Ciencias de la salud resolviendo problemas de proporcionalidad? Así, el objetivo principal será analizar las técnicas de resolución y su poder heurístico en la resolución de una situación cercana a la vida cotidiana y propia del ámbito de CC de la Salud (colesterol en sangre). Para alcanzar este objetivo, este trabajo se organiza en cuatro apartados: marco teórico y metodológico, experimentación (con indicación de la población, muestra y descripción del instrumento utilizado), resultados y su discusión y, a modo de conclusión, se señalan los aspectos clave de la actividad matemática de los estudiantes que sugieren recomendaciones para la enseñanza.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

De forma muy somera, en la *Teoría de los campos conceptuales* (Vergnaud, 1990) se aborda como un “espacio de problemas” fundamental las *estructuras multiplicativas* (Vergnaud, 1983), como conjunto de situaciones cuyo procedimiento implica una o más multiplicaciones o divisiones. Además, este campo incluye un conjunto de conceptos y teoremas para el análisis de situaciones de proporcionalidad, que involucran distintas formas de representación y uso (tablas, reducción a la unidad, regla de tres o función lineal). En este contexto, Vergnaud (1991) define *espacio de medida* considerando una magnitud y su medida. Así, en una situación, para una magnitud física, como la masa corporal de una persona o el volumen de sangre, se asignan cantidades que se expresan con una medida y con una determinada unidad de medida, por ejemplo, 78kg o 10dL.

Asimismo, es necesario identificar el tipo de cantidad que se manipula. Simon y Placa (2012) diferencian entre *cantidades extensivas* e *intensivas*. Una cantidad *extensiva* es una cantidad que se puede medir directamente (por ejemplo, masa corporal, estatura). Una cantidad *intensiva* no se puede medir directamente y es el cociente (comparación multiplicativa) de dos cantidades extensivas (por ejemplo, velocidad (m/s), densidad (hab/km^2), caudal (m^3/s)) o que también involucran cantidades intensivas (por ejemplo, la dosis a administrar de un fármaco (4-5μg/kg/min)). Con estas cantidades se realizan diversos procedimientos. Una de las estrategias multiplicativas que define Vergnaud (1991) es el *isomorfismo de medidas,* que implica la relación de dos magnitudes mediante proporcionalidad.

En un isomorfismo de medidas es preciso distinguir cuatro situaciones esencialmente distintas en relación con los procedimientos de resolución: multiplicación, división en búsqueda del valor unitario, división en búsqueda de la cantidad de unidades y regla de tres (Vergnaud, 1991, pp. 199-201). En este contexto, a pesar de que un isomorfismo establece siempre una relación funcional lineal entre dos magnitudes, no siempre las estrategias de cálculo asociadas son equiparables. Estas estrategias pueden ser de tipo *escalar* o *funcional*, también conocidas como relaciones interna y externa, respectivamente. El trabajo con relaciones externas de magnitudes diferentes implica operaciones entre cantidades distintas, obteniéndose una nueva cantidad con unidad cociente. Por ejemplo, al multiplicar los kilogramos de masa corporal por 0.07 L/kg, se obtiene la cantidad de litros del volumen de sangre. Por otro lado, la propiedad de la función lineal “$f(kx) = k\,f(x)$”, con k escalar, permite establecer una relación multiplicativa, base de una *estrategia escalar*. Por ejemplo, con el doble de masa corporal, se estima el doble de volumen de sangre. Desde el punto de vista cognitivo, las diferentes estrategias suponen distinto nivel de complejidad tal como afirman Hoyles et al. (2001). Estos niveles de complejidad quedan en ocasiones ocultos cuando no se catalogan correctamente las diferencias entre los problemas planteados y las técnicas de resolución. Así, por ejemplo, Martínez-Juste et al. (2022) muestran cómo en ocasiones problemas de “valor faltante” son etiquetados como “problemas de regla de tres” llevando a una confusión entre tipo de problema y técnica de resolución.

EXPERIMENTACIÓN

Población y muestra

La muestra es intencional por selección de todos los sujetos pertenecientes a la asignatura “Razonamiento Cuantitativo” para estudiantes de diversos ámbitos de Ciencias de la salud. La asignatura incluye nociones básicas de aritmética, álgebra, estadística, funciones reales de variable real, cálculo diferencial e integral. La muestra está compuesta por 65 estudiantes), de dos grupos (A=30 y B=35). La edad promedio de estos estudiantes es 18 años. El análisis de las respuestas se sigue tanto del resultado como del procedimiento. El envío a través de la plataforma Desmos classroom (https://teacher.desmos.com) se hace mediante una imagen de la resolución en papel.

Análisis de la situación

Antes de la realización de la situación (figura 1), los estudiantes reciben una clase teórica sobre proporcionalidad. El objetivo de esta situación es relacionar cantidades extensivas e intensivas, a través de la noción de nivel de colesterol de una persona. La actividad se presenta en un contexto asociado a las prácticas de nutrición.

Figura 1. Cuestionario

Actualmente, Raúl tiene 181.16 mg/dL en sangre de nivel de colesterol. Hoy por la mañana, Raúl desayunó 5huevos cocidos.
Se sabe que,
- Un huevo cocido tiene una masa de 52.38 g.
- Cada 100 g de huevo cocido contiene 375.11 mg de colesterol.
- Actualmente Raúl tiene un masa corporal de 85.88 kg.
- El volumen en sangre, en litro, de cada persona es numéricamente 7.33% de la masa corporal, en kilogramos.

Luego de comer los huevos cocidos, ¿cuál es su nuevo nivel de colesterol? Redondee a dos decimales sus cálculos

En la figura 1, las medidas en los cajetines (181.16 mg/dL, 5 huevos, 52.38g, etc.) están programadas en para que la plataforma arroje de manera automática para cada estudiante un valor diferente, dentro de un intervalo fijo. Estos intervalos, que incluyen el nivel de colesterol (150 – 190 mg/dL), la masa del huevo (50 – 60 g), la masa corporal (80 – 92 kg) y el porcentaje de volumen de sangre (7 – 8 %), se siguen para garantizar el trabajo individual. Los ejemplos mostrados (figuras 2 y 3) no presentan pues los mismos valores, porque son representativos de actividad matemática que difiere en los valores numéricos con los que operan los estudiantes. El procedimiento de resolución de la situación precisa de la realización de dos subtareas (tabla 1).

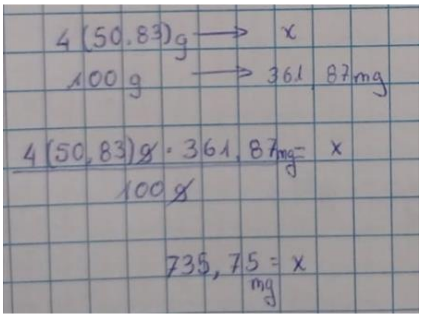
Tabla 1. Subtareas asociadas a la situación planteada

T1	T2
• Determinar la cantidad de masa de colesterol aporta un huevo. • Hallar la cantidad de masa de colesterol que aporta el total de huevos consumidos.	• Calcular el volumen de sangre de una persona dada su masa corporal (relacionar masa corporal, en kilogramos, con volumen el volumen de sangre, en litros). • Convertir el volumen de sangre de L a dL (multiplicar por 10, 1L/10dL o 1dL/0.1L). • Hallar la cantidad del nivel de colesterol a aumentar. • Determinar el nuevo nivel de colesterol.

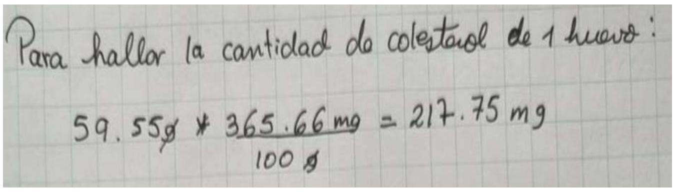
Estas subtareas están asociadas a comparar, relacionar magnitudes y realizar la conversión de unidades. En otras palabras, requieren un razonamiento proporcional complejo, empleando diferentes unidades: masa (g, mg, kg), volumen (L, dL) y concentración (mg/dL). Además, incluye un componente fenomenológico (Freudenthal, 1983) asociado a la salud, ya que es preciso saber los niveles de colesterol estándar como medio de control en las respuestas obtenidas.

En la figura 2, se observan resoluciones correctas de la subtarea T1. En esta subtarea, se prevé que los estudiantes tengan dificultad en el empleo de la cantidad “masa de colesterol”, dada por cada 100g de masa de huevo y no por cada huevo (unidad). Esto requiere un razonamiento proporcional compuesto, ya que se relaciona cantidad de unidades de huevo, cantidad de masa de huevo, cantidad de masa de colesterol.

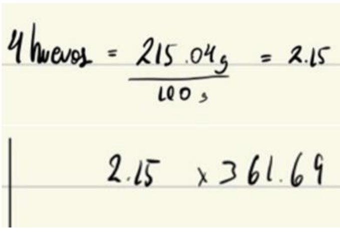
Figura 2. Técnicas correctas de resolución de T1



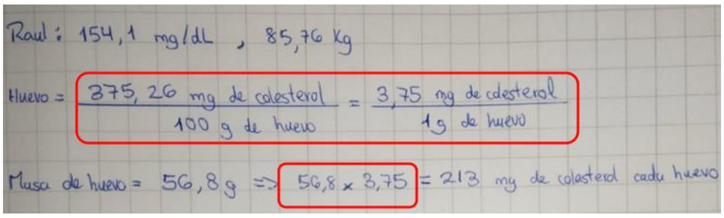
(a) Regla de tres simple



(b) Factor de conversión



(c) Reducción a la unidad relación escalar



(d) Reducción a la unidad relación funcional

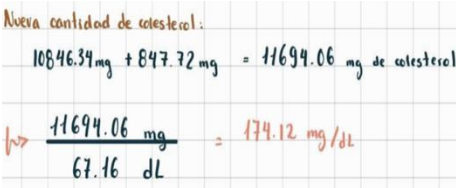
En la figura 3, se muestran respuestas correctas y descripción de los procesos generales de la subtarea T2. Esta resolución tiene dos técnicas asociadas (t1 y t2) y cada una de ellas se realiza en dos pasos.

Figura 3. Técnicas correctas para la subtarea T2

(a) técnica 1 (t1)

Primero se suman cantidades extensivas (masa de colesterol) y segundo se "opera" para hallar una cantidad intensiva (nivel de colesterol).

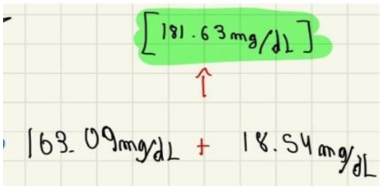
- Paso 1 (t1p1): a mg + b mg = c mg
- Paso 2 (t1p2): (c mg / d dL) = e mg/dL



(b) técnica 2 (t2)

Primero se "opera" para hallar una cantidad intensiva (nivel de colesterol) y segundo se suman cantidades intensivas (nivel inicial de colesterol con el obtenido con las mismas unidades).

- Paso 1 (t2p1): a mg / b dL = c mg/dL
- Paso 2 (t2p2): (d mg/dL) + (c mg/dL) = e mg/dL



Con respecto a la subtarea T2, se prevé que los estudiantes tengan dificultad en las operaciones entre cantidades extensivas e intensivas, así como el uso de las unidades de medida. En concreto, por un lado, se estima que los estudiantes que utilizan la técnica t1 (figura 3a) tengan una tasa de éxito menor, dado que se debe determinar primero una cantidad total de colesterol considerando el cálculo del valor inicial, para luego determinar el nuevo nivel. Por otro lado, se considera que los estudiantes que utilizan la técnica t2 (figura 3b) presenten dos tipos de errores: uno, no determinar la cantidad a incrementar, dado que se trata de una cantidad intensiva; otro, omitir añadir esa cantidad intensiva obtenida al nivel inicial de colesterol, habiendo elegido la misma unidad de medida. Estas dificultades de resolución en las tareas T1 y T2 están asociadas a las estrategias escalar o funcional utilizadas por los estudiantes y al poder heurístico que se les puede asociar teniendo en cuenta la tasa de éxito en la resolución. Asimismo, se debe analizar las diferencias atendiendo a la naturaleza de las cantidades manipuladas (extensivas o extensivas). Bajo estos presupuestos se identifican variables operativas para la interpretación de las respuestas de los estudiantes (tabla 2).

Tabla 2. Variables operativas

T	N	Variable	Descripción
1	1	T1	Respuesta correcta de T1
	2	R3S	T1: uso correcto de la regla de tres simple
	3	FC	T1: uso correcto de factor de conversión
	4	RUe	T1: uso correcto de reducción a la unidad donde se prioriza la relación escalar
	5	RUf	T1: uso correcto de reducción a la unidad donde se prioriza la relación funcional
2	6	T2	Resolución correcta de T2
	7	VS	T2: Calculo correcto de volumen de sangre
	8	t1	T2: Uso correcto de la técnica 1 de la tarea 2
	9	t2	T2: Uso correcto de la técnica 2 de la tarea 2
	10	t1p1	T2: Uso correcto de la parte 1 con la técnica t1 para resolver la tarea 2
	11	t1p2	T2: Uso correcto de la parte 2 con la técnica t1 para resolver la tarea 2
	12	t2p1	T2: Uso correcto de la parte 1 con la técnica t2 para resolver la tarea 2
	13	t2p2	T2: Uso correcto de la parte 2 con la técnica t2 para resolver la tarea 2

Resultados y su discusión

Las frecuencias absolutas asociadas a las distintas variables se muestran en la tabla 3 y también los porcentajes calculados sobre el total de respuestas por grupo.

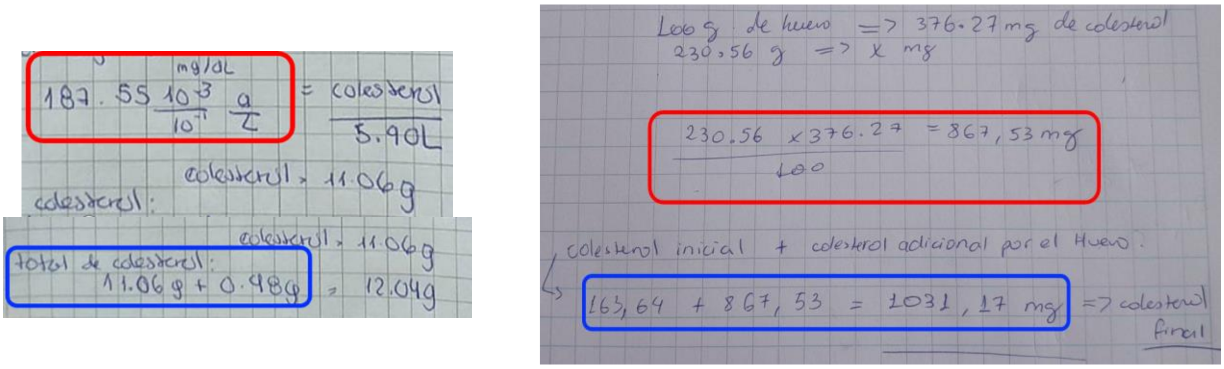
Tabla 3. Frecuencias absolutas (fa) y porcentajes (%)

	Grupo A: subtarea T1					Grupo A: subtarea T2							
	T1	R3S	FC	RUe	RUf	T2	VS	t1	t2	t1p1	t1p2	t2p1	t2p2
Fa	29	24	3	1	2	17	23	7	10	9	7	15	10
%	96.7	80	10	3.3	6.7	56.7	76.7	23.3	33.3	30	23.3	50	33.3

	Grupo A: subtarea T1					Grupo A: subtarea T2							
	T1	R3S	FC	RUe	RUf	T2	VS	t1	t2	t1p1	t1p2	t2p1	t2p2
Fa	32	29	1	1	2	24	33	6	17	8	6	23	17
%	91.4	82.9	2.9	2.9	5.7	68.6	94.3	17.1	48.6	22.9	17.1	65.7	48.6

El análisis relacional exhaustivo de las respuestas permite observar resultados tanto de la resolución de las subtareas como del uso de técnicas y su eficacia. La tasa de respuesta correcta en la subtarea T1 (T1 = 96.7% y 91.4%, respectivamente en los grupos A y B) permite afirmar que la actividad es comprendida por los estudiantes y que, por lo tanto, ambos grupos tienen estrategias de base para la resolución de este tipo de tareas; a saber, la regla de tres simple (R3S = 80% y 82.9%). Este resultado confirma que el empleo del algoritmo R3S muestra menores dificultades en el proceso de cálculo (Roditi, 2012). Con respecto a la subtarea T2, la mayoría de los estudiantes han sido capaces de determinar el volumen de sangre (Vs = 76.7% y 94.3%). Sin embargo, este proceso no garantiza el éxito de la tarea, debido a que solo 41 estudiantes obtuvieron una respuesta correcta (T2 = 56.7% y 68.6%). En la figura 4 se muestran ejemplos representativos de procedimientos incorrectos observados.

Figura 4. Procedimientos incorrectos en los pasos de las técnicas de la T2



(a) respuesta cantidad extensiva en g (b) suma de cantidad intensiva con otra extensiva

En esta subtarea T2, se utilizan dos técnicas de resolución que difieren en manejo de las cantidades extensivas e intensivas (figura 3). De los 17 estudiantes que emplean la técnica t1 (t1p1= 9 y 8), 13 logran resolver la situación de manera completa (t1p2 = 7 y 6). Con respecto a la falta de realización completa, 3 de los 4 estudiantes que realizan bien el primer paso t1p1 no son capaces de realizar el segundo paso t1p2, dado que no obtienen la cantidad intensiva a partir de las extensivas. Este resultado es notable en el sentido de que, si bien las cantidades se obtienen mediante la R3S, estos estudiantes no son capaces de dotar de sentido a sus resultados por una aplicación "automática" de dicha regla, cuestionando entonces la eficacia de su uso.

La técnica t2 es utilizada por 38 estudiantes (t2p1 = 15 y 23), pero solo 27 de ellos completan correctamente la situación (t2p2 = 10 y 17). Los errores que cometen son de tres tipos: 1) Estudiantes que suman una cantidad extensiva con otra intensiva. En la figura 4b, se observa un ejemplo donde el estudiante suma la masa de colesterol (867.53mg, cantidad extensiva) con el nivel de colesterol (163.64mg/dL, cantidad intensiva). 2) Estudiantes que no añaden la cantidad de nivel a aumentar al nivel inicial de colesterol. 3) Estudiantes que no emplean la unidad estándar para medir el nivel del colesterol (mg/dL). Este error es especialmente notable (Bourgade, 2020), dado que, si bien los estudiantes pueden trabajar con intensivos, no eligen una única unidad de medida, estableciendo relaciones que no son de proporcionalidad. Finalmente, con esta técnica, se puede observar que de los 41 estudiantes solo 27 (t2p2 = 33.3% y 48.6%) culminaron con éxito la situación completa.

Síntesis y recomendaciones para la enseñanza

El análisis del procedimiento de los estudiantes y de las dificultades que muestran en la resolución de la tarea muestra contribuyen a reforzar la tesis (Chambris y Visnovska, 2022) según la cual el contenido constituye un *obstáculo epistemológico* (Brousseau, 1997). De hecho, otras investigaciones recientes relacionadas con la resolución de problemas de proporcionalidad que involucran cantidades intensivas (aunque no necesariamente la misma clase de tareas) refuerzan esta tesis en otros contextos; a saber: Educación Secundaria (Castillo y Fernández, 2022), en contextos físico-matemáticos en Bachillerato (Tinoco et al., 2021) o en la enseñanza de Química en primer curso de Universidad (Raviolo et al., 2022).

El análisis de las respuestas del cuestionario nos ha permitido inferir que los estudiantes de Ciencias de la salud tienen una predilección por la técnica de regla de tres R3S en tareas donde se tienen magnitudes proporcionales. Asimismo, los estudiantes que utilizan otros procedimientos se relacionan con los métodos *analógicos* (reducción a la unidad escalar) o *analíticos* (reducción a la unidad funcional) identificados por Roditi (2012).

Si bien la tasa de uso del algoritmo R3S es alta, se observa una bajada sustancial de su eficacia en la resolución de la subtarea T2. Esta tarea se resuelve mediante dos técnicas t1 y t2. Los estudiantes que emplean la técnica t1 aplican la R3S de forma “automática”, desprovista de sentido, lo que reduce la tasa de éxito. Sin embargo, el uso de la técnica t2 es más racional y controlado. El uso de esta técnica t2 precisa comprender que las cantidades intensivas son producto de las relaciones externas entre magnitudes, que constituyen elementos de una nueva magnitud, que, a su vez, da significado a la unidad cociente, así como una interpretación funcional de la proporción. Por todo ello, se recomienda la enseñanza preferente de esta técnica t2.

Finalmente, las respuestas analizadas permiten observar que en los procesos implícitos hay una variedad de razonamientos multiplicativos al realizar operaciones entre cantidades, donde los estudiantes no se cuestionan acerca de la naturaleza de las cantidades involucradas. Es por lo que se recomienda en la enseñanza, en primer momento, la identificación de las relaciones internas y externas entre magnitudes y su articulación, y, en un segundo momento, avanzar en el estudio de razones de cambio promedio como comparación de diferencias de cantidades. Esta recomendación debe servir para el diseño y control de la experimentación de una propuesta didáctica coherentes, siguiendo, por ejemplo, el trabajo de Martínez-Juste (2022).

Referencias

Artaud, M., Redondo, C., Bernad, K. y Bonniol, V. (2022). Collaborative research as an institution that incorporates research systems Case study of a mathematical problem-solving Project. En Learning, strategies, and educational policies. What interdisciplinarity, methodologies and international perspectives? *2nd SFERE-Provence/Ampiric Conference on Education*.

Aviña-González, M. J., Vargas-Alejo, V., Alvarado-Monroy, A. y Escalante, C. C. (2019). Ciclos de entendimiento de estudiantes universitarios al resolver una actividad de proporcionalidad. CPU-e. *Revista de Investigación Educativa, 29,* 58-86.

Barrera-Mora, F. y Santos-Trigo, L. M. (2000). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional: formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas (*pp. 166-185) Bogotá.

Bourgade, J. P. (20-22 de febrero de 2020). *Formación docente: el caso de la proporcionalidad*. X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas. Perú.

Brousseau, G. (1998). Théorie *de situations didactiques en mathématiques*. La Pensée Sauvage.

Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022). Competencia reflexiva en futuros profesores de matemáticas mediante el análisis de lecciones de libros de texto. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 189-198). SEIEM.

Castillo, S. y Fernández, C. (2022). Secondary school students' performances on Ratio comparison problems. *Acta Scientiae*, *24*(6), 60-88.

Castro, M. (2019). Bioestadística aplicada en investigación clínica: conceptos básicos. *Revista Médica Clínica Codes*, *30*(1), 50-65.

Chambris, C. y Visnovska, J. (2022). On the history of units in French elementary school arithmetic: The case of proportionality. *Historia Mathematica*, *59*, 99-118.

Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2-3), 135-182.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel Publishing Company.

Gairín, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 249-259). SEIEM.

García-Oliveros, G., Granados-Silva, R. y Pinillos-Bohórquez, O. (2009). Razonamientos proporcionales en estudiantes de enfermería. *El Hombre y la Máquina*, *33*, 72-81.

Hoyles, C., Noss, R. y Pozzi, S. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(1), 4-27.

Martínez-Juste, S. (2022). *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de secundaria*. [Tesis doctoral]. Universidad de Valladolid.

Noss, R., Hoyles, C. y Pozzi, S. (2002). Abstraction in expertise: A study of nurses' conceptions of concentration. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(3), 204-229.

Raviolo, A., Schroh, N. T. y Farré, A. (2022). La comprensión de estudiantes de primer año de universidad del concepto de concentración expresada en gramos por litro. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(1), 143-159.

Roditi, E. (2012). L'enseignement du calcul de doses médicamenteuses : Un défi pour la santé publique au 21è siècle. *Enseignement des mathématiques et contrat social. Actes du colloque EMF2012* (pp. 1235–1245).

Romo-Vázquez, A. y Artigue, M. (2023). Research on Tertiary Mathematics Education for Non-specialistsIn *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education* (pp. 535-557). Springer.

Simon, M. A. y Placa, N. (2012). Reasoning about intensive quantities in whole-number multiplication? A possible basis for ratio understanding. *For the Learning of Mathematics*, *32*(2), 35-41.

Tinoco, J. C., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Estrategias de proporcionalidad simple en las aulas de Matemáticas y de Física. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 587 – 594). SEIEM.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol.2, pp. 41-52). Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *RDM*, *10*(2), 33-170.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* Trillas.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el EOS.*