DEL ARRASTRE VERTICAL A LA PERPENDICULARIDAD: ELABORACIÓN DE UNA PROPIEDAD GEOMÉTRICA EN 3D AL RESOLVER PROBLEMAS CON GEOMETRÍA DINÁMICA

From vertical dragging to perpendicularity: making a 3D geometric property by solving problems with dynamic geometry

Sua, C., Jaime, A., Gutiérrez, A.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia

Resumen

Los problemas de construcción y demostración son una vía para aprender a demostrar deductivamente, gracias a las propiedades geométricas representadas por las herramientas de construcción de un ambiente de geometría dinámica y a los significados que su uso promueve en los estudiantes. Algunos estudios han utilizado la analogía en el estudio de la geometría 3D apoyándose en relaciones geométricas 2D y en el uso de geometría dinámica. Basados en la resolución de problemas de construcción y demostración en un ambiente de geometría dinámica, que inducen el estudio de elementos geométricos 3D a través de elementos análogos en 2D, analizamos la elaboración de una propiedad 3D por un estudiante con alta capacidad matemática. Los resultados del análisis muestran el refinamiento instrumental y conceptual que acompaña este proceso, así como la apropiación de esta propiedad como herramienta teórica y de construcción.

Palabras clave: *geometría dinámica tridimensional, problemas de construcción y demostración, analogía, perpendicularidad, equidistancia*

Abstract

Construction-and-proof problems are a way to learn to do deductive proofs, given the geometric properties represented by the construction tools of a dynamic geometry environment and the meanings their use promotes in students. Some studies have used the analogy in the study of 3D geometry, relying on 2D geometric relationships and the use of dynamic geometry. Based in construction-and-proof problem-solving in a dynamic geometry environment, which induce the study of 3D geometric properties through analogous 2D objects, we analyze the elaboration of a 3D geometric property by a mathematically gifted student. The analysis results show the instrumental and conceptual refinement that accompanies this process, as well as the appropriation of this property as a theoretical and construction tool.

Keywords: *3-dimensional dynamic geometry, construction-and-proof problems, analogy, perpendicularity, equidistance*

INTRODUCCIÓN

Los ambientes de geometría dinámica (en adelante AGD) apoyan el aprendizaje de la elaboración de demostraciones deductivas. Una de las vías para lograr esto es la resolución de problemas de construcción y demostración (Mariotti, 2012). Hay abundante literatura que analiza y caracteriza el razonamiento de los estudiantes al usar AGD para resolver este u otros tipos de problemas matemáticos, siendo el contexto de la geometría 2D en el que la literatura se sitúa principalmente (p. ej., Larios Osorio *et al*., 2017), quedando el campo de la geometría 3D poco explorado (p. ej., Gutiérrez y Jaime, 2015 y Gutiérrez *et al*., 2014). Conscientes de este desequilibrio y de la dificultad de estudiar la geometría 3D por la complejidad de las representaciones e interpretación de

Sua, C., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2023). Del arrastre vertical a la perpendicularidad: elaboración de una propiedad geométrica en 3D al resolver problemas con geometría dinámica. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 523–530). SEIEM.

los objetos geométricos allí presentes, algunos estudios han acudido al establecimiento de analogías entre la geometría 2D y 3D, apoyándose en el uso de AGD, con el fin facilitar a los estudiantes la comprensión y el aprendizaje de la geometría 3D mediante la comparación de objetos geométricos de ambos dominios que tienen propiedades similares (Ferrarello *et al*., 2020; Molina *et al*., 2021).

Presentamos parte de un proyecto de investigación en el que analizamos el proceso de razonamiento y el progreso en el aprendizaje de la elaboración de demostraciones deductivas por varios estudiantes con alta capacidad matemática cuando resuelven problemas de construcción y demostración en un AGD 2D y 3D combinado. El análisis presentado aporta información novedosa que muestra el largo recorrido en la formulación y refinamiento de una propiedad geométrica 3D, así como el papel desempeñado por un AGD en este proceso.

El objetivo de investigación de este documento es analizar el establecimiento, modificación y uso de una propiedad de equidistancia en 3D, por parte de un estudiante con alta capacidad matemática, en el marco de la resolución de problemas de construcción y demostración que promueven analogías entre dominios específicos de la geometría 2D y 3D.

MARCO TEÓRICO

Problemas de construcción y demostración: aportes de los ambientes de geometría dinámica

Consideramos una *demostración* como un argumento matemático, empírico o deductivo, cuyo objetivo es convencer a alguien sobre la verdad de una declaración matemática. En nuestro estudio, hacemos énfasis en el aprendizaje de la demostración a través de los *problemas de construcción y demostración.* Estos problemas, cuando se resuelven en un AGD, solicitan i) crear una figura geométrica que tenga las propiedades requeridas por el problema y que estas se conserven bajo arrastre y ii) explicar el procedimiento usado para crear la figura y demostrar que es matemáticamente correcto, es decir, que el protocolo de construcción produce una figura que cumple las condiciones del problema (Mariotti, 2019).

Al usar los estudiantes herramientas del AGD en la construcción de objetos geométricos, se producen significados personales, gracias a las relaciones de dependencia que descubren y verifican a través del arrastre (Mariotti, 2019). Estas herramientas también están relacionadas con elementos teóricos de la geometría euclidiana, que pueden apoyar a los estudiantes al desarrollar demostraciones de las construcciones (Mariotti, 2012). Resolver problemas de construcción y demostración permite a los estudiantes aprovechar las posibilidades del AGD y el sistema lógico que subyace a este. Por lo tanto, las construcciones geométricas tienen una naturaleza puramente teórica, donde su validez está vinculada a demostrar que un conjunto de pasos de construcción provee un resultado específico. Resolver este tipo de problemas puede llevar a los estudiantes a evocar significados teóricos de las herramientas que han usado en las soluciones (Mariotti, 2019).

La analogía: una herramienta para extender ideas y resolver problemas

Una *analogía* es una relación de semejanza entre dos dominios a través de objetos y relaciones específicas. Un dominio es "una representación de ciertos aspectos de un fenómeno, situación, proceso, modelo, problema, estructura conceptual, etc." (Schlimm, 2008, p. 178). Elaborar analogías es un producto de la actividad humana con varios beneficios (Richland y Simms, 2015). Este proceso demanda reconocer estructuras conceptuales correspondientes entre diferentes dominios, sus semejanzas y diferencias, avanzando así de unas comparaciones basadas en aspectos superficiales a otras basadas en relaciones entre esos dominios. Esto tiene implicaciones para el aprendizaje de las matemáticas (English, 1997), dado que, al establecer relaciones en un dominio y llevarlas a otro, en el cual estas relaciones son válidas, la analogía permite descubrir nuevos objetos y relaciones, formular hipótesis y simplificar operaciones mentales complejas en el dominio de destino, al realizarlas en el dominio de origen, que ya es conocido (Fischbein, 2002).

En nuestra investigación, la analogía se convierte en una herramienta que permite explorar y descubrir relaciones en un dominio específico de la geometría 3D —desconocido por los estudiantes—, tomando como base el dominio correspondiente de la geometría 2D, ya conocido por ellos, e interpretando los resultados obtenidos en este último dominio a la luz de las características del dominio específico 3D en el que el problema original se sitúa.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Los análisis reportados pertenecen a una investigación cualitativa basada en un estudio de caso, en la que analizamos el aprendizaje de la elaboración de demostraciones, en el contexto de la geometría 3D y con la mediación de GeoGebra, por parte de cuatro estudiantes de educación secundaria con alta capacidad matemática, con edades entre 11 y 14 años. Los consideramos estudiantes con alta capacidad matemática debido a que, además de su experiencia escolar, ellos habían participado en programas de atención al talento general y al talento matemático.

Diseñamos e implementamos una secuencia de 18 problemas de construcción y demostración en sesiones de 60 minutos. Algunos problemas requerían la construcción, primero en 2D y luego en 3D, de objetos geométricos que satisficieran propiedades asociadas a la equidistancia (p. ej., construir un triángulo equilátero dado su lado). Otros problemas requerían construir un objeto 2D y uno análogo en 3D (p. ej., encontrar el centro de una circunferencia en 2D y luego el centro de una esfera en 3D). La resolución de cada problema proveía a los estudiantes de elementos conceptuales e instrumentales para resolver los siguientes problemas. Los estudiantes primero resolvían el problema y luego discutían su solución y justificaban su validez con el profesor (primer autor de este documento), quien gestionaba la conversación. Grabamos las sesiones en audio y video, previa autorización de estudiantes y padres. Dada la diferencia de cursos escolares y conocimientos de los cuatro estudiantes, las sesiones se organizaron como entrevistas clínicas individuales.

Presentamos los episodios de la resolución de cinco problemas por un estudiante al que llamaremos Rafael (pseudónimo), de 13 años y que había finalizado el tercer curso de ESO. Previo a la implementación de la secuencia, los conocimientos de Rafael de geometría 3D eran escasos, provenientes de su experiencia escolar y limitados al reconocimiento de sólidos básicos (p. ej., esfera, poliedros). La experiencia de Rafael con GeoGebra se limitaba al uso de algunas herramientas de GeoGebra 2D, siendo GeoGebra 3D y sus herramientas desconocidas para él.

La actividad de Rafael al resolver los problemas ilustra la emergencia, modificación y uso de una propiedad geométrica 3D a la que llamaremos *perpendicularidad-equidistancia*. En este proceso tiene un papel central la analogía entre dominios específicos de perpendicularidad y equidistancia en 2D y 3D. En lo que sigue, presentamos los episodios y realizamos un análisis global de estos.

La *propiedad Perpendicularidad – Equidistancia* establece que: dado un plano α, si un punto A en el plano α equidista de dos o más puntos contenidos en el mismo plano, todo punto en la recta perpendicular al plano α que contiene al punto A equidista también de dichos puntos.

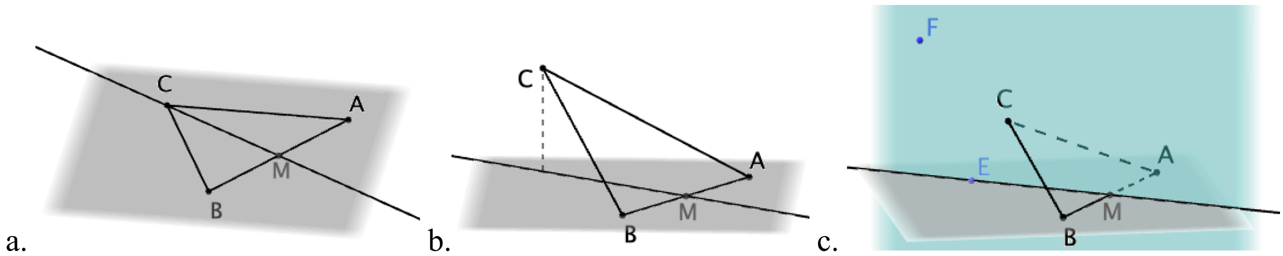
LA RELACIÓN PERPENDICULARIDAD - EQUIDISTANCIA EN EL ESPACIO

Episodio 1. El problema 6 proporciona dos puntos A y B en el plano XY. Rafael debía construir puntos que equidisten de A y B, primero en GeoGebra 2D y luego en GeoGebra 3D. La solución de este problema llevaría a establecer la mediatriz y el plano mediador, respectivamente, como lugares geométricos. En GeoGebra 2D, Rafael identificó rápidamente la mediatriz como la solución al problema. El estudiante sabía que esta recta es perpendicular al segmento AB por su punto medio, propiedades que le permitieron demostrar que los puntos contenidos en ella equidistan de A y B.

Al resolver el problema en GeoGebra 3D, Rafael utilizó las construcciones hechas en GeoGebra 2D para realizar la exploración: el segmento AB, su punto medio M, su mediatriz y un punto C de esta recta, que determinaba los segmentos CA y CB (Figura 1a). Rafael arrastró el punto C verticalmente (respecto del plano XY, Figura 1b) y afirmó que C equidista de A y B. Para demostrar la validez de su estrategia, Rafael comentó *a C lo hemos movido en el eje Z* (paralelo al eje Z), [desplazando el puntero de arriba a abajo], *mientras que estos dos puntos* [A y B], *al estar en el mismo punto respecto a Z, bueno, a la misma altura,* [la equidistancia] *no varía. Si estuviese uno de los dos* [puntos] *más alto* [distancia respecto al plano XY], *sí que variaría* [la equidistancia].

El profesor pidió a Rafael encontrar otros puntos en GeoGebra 3D que equidistaran de A y B. Él construyó (Figura 1c) los puntos E y F en la mediatriz, arrastró F verticalmente y construyó el plano EMF. Rafael vinculó el punto C a este plano y lo arrastró a distintos lugares de este, mientras afirmaba que cada posición de C conserva la equidistancia (Figura 1c). Para validar su estrategia, Rafael afirmó que *lo único que está cambiando es el eje Z, moviéndolo* [arrastrando C] *por la propia mediatriz, que ya habíamos dicho antes que se podía* [solución en 2D].

Figura 1. Génesis de la propiedad Perpendicularidad - Equidistancia

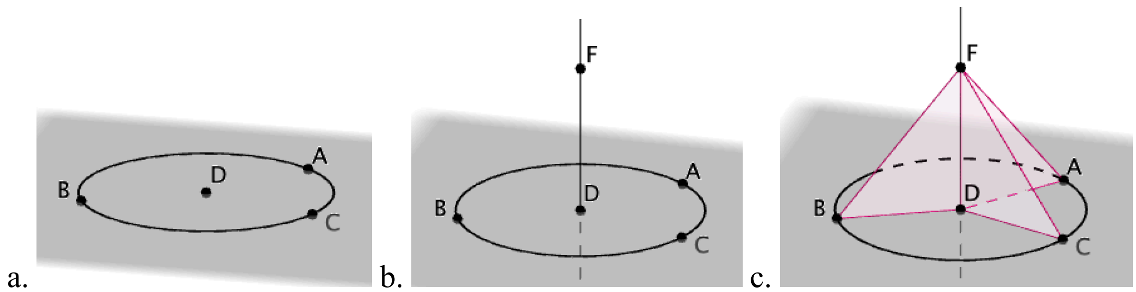


Este episodio muestra cómo las acciones de Rafael al resolver el problema lo llevan a establecer un vínculo entre el arrastre vertical de puntos y la equidistancia en 3D.

Episodio 2. El problema 8 solicita primero construir en GeoGebra 2D el centro de la circunferencia determinada por tres puntos no alineados A, B y C. Posteriormente, tomando como base los mismos puntos A, B y C, se pide construir en GeoGebra 3D un punto que equidiste de A, B y C que no esté en el plano XY. La construcción del centro D de la circunferencia no fue problemática para Rafael, él utilizó dos cuerdas de la circunferencia y sus respectivas mediatrices para determinar este punto.

En GeoGebra 3D, Rafael contaba con la circunferencia ABC y su centro D, construido en la primera parte del problema (Figura 2a). Rafael intentó arrastrar verticalmente el punto D, pero las propiedades de su construcción no le permitían hacerlo: *quiero crear aquí un punto* [señalando la posición del punto D], *pero que pueda mover. Quiero hacer un punto que esté arriba de D… exactamente arriba. Que solo se modifique el eje Z* [componente z de las coordenadas del punto D]. Tras estas afirmaciones, Rafael propuso una estrategia para obtener el punto que quería: *Quiero hacer una recta que pase por D, perpendicular al plano, pero no sé cómo hacerla*.

Figura 2. La perpendicularidad se hace explícita en la propiedad



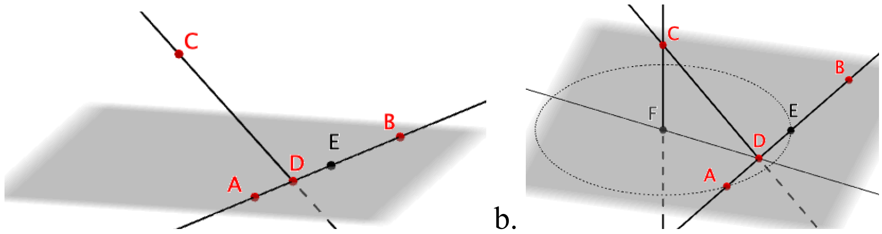
Al ser la primera vez que había que crear una recta perpendicular a un plano, el profesor explicó a Rafael cómo construirla. Cuando Rafael construyó la recta deseada, él ubicó un punto F, distinto al punto D en esta recta (Figura 2b). Rafael demostró la validez del punto F con ayuda de los segmentos DC, DB y DA, sobre los que afirmó que *serían radios… y todos tienen la misma distancia* [longitud] (Figura 2c). Él también construyó los segmentos FA, FB y FC y luego afirmó que, *por el teorema de Pitágoras, como todos tienen la misma base que es el radio y la misma altura, que es la distancia de D a F, la hipotenusa tendría que ser la misma, es decir la distancia entre los puntos* [F y A, B y C, es la misma].

En este episodio se establece una relación entre perpendicularidad y equidistancia en 3D.

Episodio 3. El problema 9 propone la siguiente configuración en GeoGebra 3D: la recta AB está contenida en el plano XY, el punto C, no contenido en este plano, determina una recta perpendicular a la recta AB, cuya intersección es el punto D y el punto E pertenece a la recta AB, de forma que la distancia entre A y D es la misma que entre D y E (Figura 3a). Con esta configuración, Rafael debía descubrir que el lugar geométrico de E al arrastrar B en el plano XY era una circunferencia que también contiene el punto A. Luego, él debía construir dicha circunferencia.

Rafael construyó la recta *h*, perpendicular al plano XY que contenía a C y nombró F a la intersección entre esta recta y el plano XY (Figura 3b). Para asegurar que F es el centro de la circunferencia solicitada por el problema, Rafael mencionó que *de A a D hay la misma distancia que de D a E y como C es* [está en] *la perpendicular de la línea* [AB] *que pasa por D* [recta CD], *también tiene la misma distancia* [respecto de A y E]*… La línea que pasa de C* [recta h] *al plano* [XY] *es perpendicular al plano … Entonces, al ser perpendicular,* [F] *sigue manteniendo la misma distancia… es el medio, porque* [todo punto de h] *siempre está a la misma distancia de ambos*.

Figura 3. Uso de la relación Perpendicularidad - Equidistancia

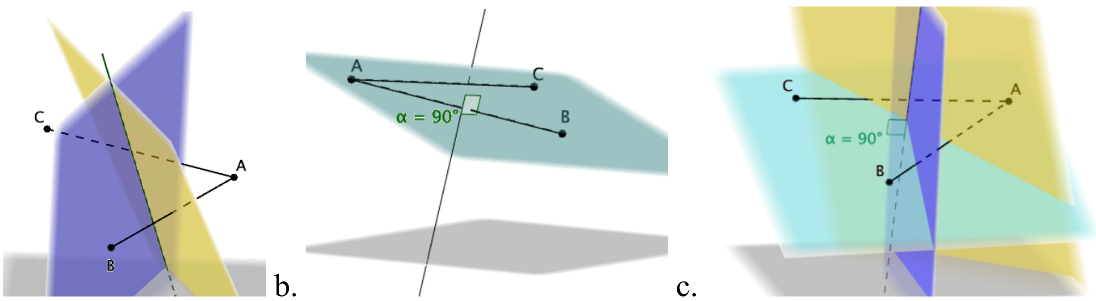


a. b.

El tercer episodio muestra cómo Rafael usa la relación perpendicularidad – equidistancia para sustentar que un punto equidista de otros dos, de forma distinta a la ocurrida en el segundo episodio.

Episodio 4. El problema 10 solicita construir tres puntos A, B y C, no alineados ni contenidos en el plano XY, los planos mediadores de los segmentos AB y AC y la intersección de estos planos (Figura 4a). Luego pide arrastrar el punto A y determinar una propiedad de la recta de intersección de los planos mediadores. Después de hacer la construcción y arrastrar A, Rafael expresó que esta recta era perpendicular al plano ABC, lo cual verificó de forma empírica (Figuras 4b y 4c). Al pedirle el profesor una demostración de esta propiedad, Rafael dijo que *esta* [recta de intersección] *está hecha con los dos planos mediadores…, el punto en el que intersecan* [los planos] *forma una línea en la que todos los puntos están a la misma distancia de B y de C. Entonces solo se puede mover en el…* [paralelo al] *el eje Z. Si el plano XY fuera este plano de aquí* [señala el plano ABC], *solo se mueve en Z, entonces, no cambia el ángulo. Siempre es perpendicular*.

Figura 4. Uso de la propiedad recíproca: Equidistancia - Perpendicularidad

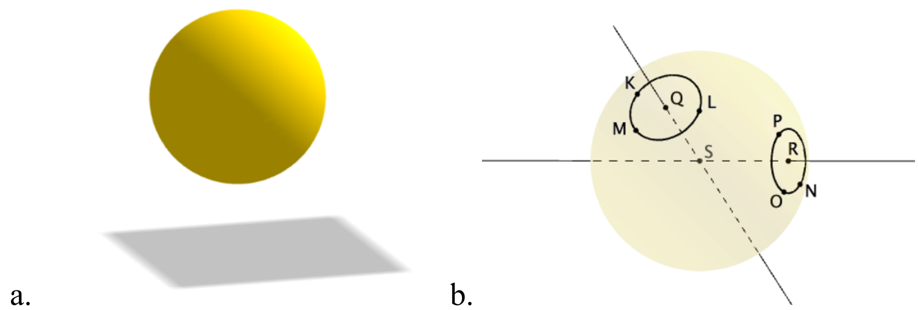


a. b. c.

El cuarto episodio muestra el uso del recíproco de la propiedad perpendicularidad – equidistancia por Rafael, para sustentar la perpendicularidad entre una recta y un plano.

Episodio 5. El problema 16 pide determinar el centro de una esfera dada (Figura 5a). Para resolver el problema, Rafael construyó dos circunferencias determinadas por tríos de puntos pertenecientes a la esfera, construyó sus centros y las rectas perpendiculares a las circunferencias por sus respectivos centros (Figura 5b). Rafael aseguró que la intersección de ambas rectas (punto S) era el centro de la esfera: *…el punto en el que coinciden* [las rectas] *debería ser el centro… Porque son perpendiculares a la esfera como tal. Sería el diámetro… todos los puntos de la recta estaban a la misma distancia de estos tres puntos* [los que determinan la circunferencia].

Figura 5. Uso de la propiedad Perpendicularidad - Equidistancia



En el último episodio, Rafael usa la propiedad perpendicularidad - equidistancia como herramienta para la construcción de objetos y la justificación de las propiedades que estos satisfacen.

ESTABLECIMIENTO DE UNA PROPIEDAD 3D: UN ANÁLISIS

Los episodios anteriores muestran el proceso de elaboración y transformación de una propiedad de la geometría 3D. El origen de esta propiedad tuvo lugar en el primer episodio, en la búsqueda de puntos en el espacio que equidistaran de dos puntos fijos contenidos en el plano XY. Determinar estos puntos llevó al establecimiento de una analogía entre los lugares geométricos que eran solución del problema en 2D y 3D. En concreto, al tomar como referencia la mediatriz como solución en 2D y desplazar verticalmente uno de sus puntos, asegurando el cumplimiento de lo solicitado por el problema, Rafael estableció un mecanismo para la conservación de la equidistancia en el espacio a través del arrastre de puntos en la dirección del eje Z, tomando como base configuraciones en el plano que satisficieran la misma propiedad.

Esta analogía estuvo presente también en el segundo episodio. En esa oportunidad, Rafael tomó la solución en el plano XY (centro de la circunferencia) como referencia para determinar el conjunto de puntos que equidistan en el espacio. Sin embargo, este episodio ofreció otros dos elementos a favor de la propiedad que se estaba formulando. El primero fue la declaración explícita de la perpendicularidad entre el conjunto solución y el plano XY, dejando al margen la referencia al arrastre vertical o cambio en el componente *z* de las coordenadas de un punto. Al hacer esta transición, Rafael presumiblemente transformó un significado personal atribuido al arrastre vertical en un significado matemático ligado a la perpendicularidad que subyace a este arrastre característico de los AGD-3D. El segundo elemento fue la demostración deductiva de esta relación, lo que aportó sustento teórico a la estrategia empleada por Rafael al resolver los problemas.

En el proceso llevado a cabo por Rafael hasta ahora, distinguimos una transición desde una relación de equidistancia sustentada en el arrastre vertical (episodio 1) hasta una relación, más sofisticada, de equidistancia que se sustenta en la perpendicularidad (episodio 2). Esta última relación es utilizada en el tercer episodio, como herramienta de construcción para encontrar el punto en el plano XY que equidista de otros dos puntos en este plano y como soporte de la construcción realizada. El uso dado por Rafael le llevó a operar con las relaciones geométricas dadas por el problema, con el objetivo de contar con las condiciones necesarias para poder utilizar la propiedad perpendicularidad-equidistancia. Un segundo aspecto para resaltar sobre el uso de esta propiedad es que Rafael ya no tomó como punto de partida el conjunto solución en 2D para determinar soluciones en 3D, como se había realizado en los dos episodios anteriores, sino que ahora tomó como base un punto que equidista en el espacio, para llegar, a través de la propiedad elaborada, a un punto que equidista en el plano XY. Así pues, la generalidad de esta relación estaría permitiendo a Rafael moverse del plano al espacio y viceversa.

Además de su sofisticación, Rafael amplió el alcance de la relación perpendicularidad-equidistancia al utilizarla de forma bidireccional: mientras que en los tres primeros episodios el arrastre vertical o la perpendicularidad implicaban la equidistancia, en el cuarto episodio Rafael determinó la perpendicularidad entre una recta y un plano tomando como base de su argumento la equidistancia de cada punto en la recta respecto a tres puntos contenidos en el plano. Este argumento, aunque enmarcado en un razonamiento deductivo, no es suficiente para asegurar que Rafael comprendiera la relación bicondicional que estaba poniendo en juego. Investigaciones anteriores han mostrado que, en el tratamiento de relaciones condicionales, frecuentemente, los estudiantes usan de forma bicondicional (*p si y solo si q*) proposiciones que solo son válidas bajo una implicación (*p entonces q*) (Echeverry *et al*., 2012). Desafortunadamente, las acciones y razonamientos de Rafael no brindaron evidencia adicional para adoptar una postura respecto a la ampliación de esta relación.

Finalmente, en el quinto episodio podemos observar el uso decidido de la propiedad perpendicularidad – equidistancia por parte de Rafael para la construcción de un punto que satisficiera una equidistancia particular. Aunque la forma de usarla en esta ocasión es similar a la que hemos observado en los primeros tres episodios, tanto en la construcción como en la demostración de los resultados, el quinto episodio brinda evidencia del dominio que Rafael alcanzó de la propiedad y la constante presencia de esta en sus estrategias para determinar puntos que equidistaran de otros. Esto último llevó a Rafael a realizar construcciones auxiliares que ofrecieran condiciones suficientes y necesarias para utilizar esta propiedad y obtener los resultados deseados.

CONCLUSIONES

Los problemas de construcción y demostración mediados por AGD ofrecen un escenario útil para aprender a elaborar demostraciones deductivas. La información presentada en este documento aporta evidencia en esa vía, al tiempo que permite explorar la influencia de este tipo de problemas en un dominio poco explorado en investigación como lo es la geometría 3D.

El seguimiento y análisis de las acciones de un estudiante en la resolución de problemas de construcción y demostración muestra el aprovechamiento de su conocimiento de un dominio específico de la geometría plana y la extensión de este a un dominio específico de la geometría espacial, a través del establecimiento de analogías entre ambos dominios. En este proceso, apoyado en el uso de herramientas y funciones del AGD, se ve el establecimiento de relaciones geométricas inicialmente intuitivas, guiadas por la percepción y la comparación con relaciones de la geometría plana conocidas, las cuales se van transformando al resolver distintos problemas, hasta alcanzar un estatus teórico en el que incluso se puede demostrar su validez. Estas nuevas relaciones, pertenecientes al dominio de la geometría espacial, se convierten en herramientas teóricas para construir objetos con determinadas propiedades y demostrar los resultados obtenidos.

En este proceso, el papel del AGD es decisivo, al permitir la materialización de las ideas del estudiante a través de construcciones y acciones sobre los objetos construidos, así como proveer una simultaneidad entre la configuración 2D y 3D. El AGD apoya la extensión de ideas de la geometría plana a la espacial, en el contexto de analogías entre ambos dominios. De esta forma, un cuidadoso diseño de tareas y el reconocimiento de las posibilidades que ofrece el AGD para su resolución, se convierte en un aspecto central al proponer problemas de construcción y demostración que lleven al estudio de la geometría espacial, tomando como base elementos de la geometría plana.

No pretendemos que los resultados presentados aquí sean generalizables. Hemos ilustrado una posible forma de utilizar herramientas y funciones de un AGD, los significados personales que estas podrían provocar a través de su uso y la transformación de dichos significados conforme se avanza en la resolución de otros problemas, todo ello en un dominio específico de la geometría 2D y 3D. Esto brinda elementos novedosos en el campo investigativo y soporta la necesidad de realizar intervenciones de largo alcance, pues, como hemos mostrado en este documento, los resultados de este proceso de aprendizaje no son inmediatos. La particularidad del estudio presentado en este documento sugiere también la necesidad de otras investigaciones en esta vía, que aporten mayor evidencia empírica y permitan formular conclusiones más generales.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto PID2020-117395RB-I00 y la beca predoctoral EDU2017-84377-R, ambos financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Echeverry, A., Molina, O., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de matemáticas en formación. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 73-88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.112

English, L. D. (1997). Children's reasoning processes in classifying and solving computational word problems. En L. D. English (ed.), *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images* (pp. 191-220). Lawrence Erlbaum.

Ferrarello, D., Flavia Mammana, M. y Taranto, E. (2020). Dynamic geometry systems in proving 3D geometry properties. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 27*(1), 19-27. https://doi.org/10.1564/tme_v27.1.03

Fischbein, E. (2002). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47237-6

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA, 9*(2), 53-83. https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6106

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Alba, F. J. (2014). Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (eds.), *Investigación en educación matemática XVIII* (pp. 405-414). SEIEM.

Larios Osorio, V., Pino-Fan, L. R. y González González, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 39-57.

Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: dynamic geometry systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 163-185. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694282

Mariotti, M. A. (2019). The contribution of information and communication technology to the teaching of proof. En G. Hanna, D. A. Reid y M. de Villiers (eds.), *Proof technology in mathematics research and teaching* (pp. 173-195). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_8

Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2021). Gestión de normas que regulan el paso de la conjetura al teorema en un curso de geometría del espacio. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (eds.), *Investigación en educación matemática XXIV* (pp. 425-432). SEIEM.

Richland, L. E. y Simms, N. (2015). Analogy, higher order thinking, and education. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Cognitive Science*, *6*(2), 177-192. https://doi.org/10.1002/wcs.1336

Schlimm, D. (2008). Two ways of analogy: extending the study of analogies to mathematical domains. *Philosophy of Science*, *75*(2), 178-200. https://doi.org/10.1086/590198