

# REUNIÓN DEL GRUPO DE INVESTIGACIÓN PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO



XIX SEIEM, Alicante  
3 al 5 de septiembre de 2015

## PRESENTACIÓN

El grupo de investigación 'Pensamiento Numérico y Algebraico' de la SEIEM tiene programadas dos sesiones de trabajo los días siguientes:

- Jueves 3, de 15:00 a 16:30h
- Viernes 4, de 15:30 a 17:00h

Durante estas sesiones se presentarán y comentarán 8 comunicaciones, según el programa siguiente. El resumen de cada una está incluido a continuación. El tiempo programado para cada comunicación incluye la presentación y el debate posterior, por lo que es muy recomendable que la exposición no agote los 20 minutos asignados a cada comunicación.

## PROGRAMA

*Jueves 3 de septiembre*

15:00- 15:10h.

**Bienvenida y presentación del seminario**

15:10- 15:30h.

**Análisis de los conocimientos implicados en un problema de Matemáticas desde un punto de vista competencial. El sistema de numeración decimal**

*J. Hernández, M. M. Socas y M.<sup>a</sup> M. Palarea. Universidad de La Laguna*

15:30-15:50h.

**Hacia la construcción de una teoría de instrucción local para los conceptos de Conjunto Generador y Espacio Generado**

*A. Cárcamo, J. Gómez y J. M.<sup>a</sup> Fortuny. Universidad Autónoma de Barcelona*

15:50- 16:10h.

**Significados asociados a las variables por estudiantes de educación primaria**

*M. Molina, A. del Río, M. C. Cañadas y A. Moreno. Universidad de Granada*

16:10- 16:30h.

**Construcción de la fracción impropia en alumnos de educación primaria de 9-12 años**  
*R. Campo y S. Llinares. Universidad de Alicante*

*Viernes 4*

15:30- 15:50h.

**Ecuaciones mediante la igualación directa de cantidades distintas: una representación errónea de la relación entre cantidades decimal**  
*J. A. González-Calero, D. Arnau, L. Puig, y M. B. Arevalillo-Herráez. Universidades de Castilla La Mancha y Valencia*

15:50- 16:10h.

**Estrategias de estudiantes de primero de educación primaria en una tarea que involucra la función  $y=x+5$**   
*R. Morales, M. C. Cañadas, M. Molina, A. del Río y A. Moreno. Universidad de Granada*

16:10-16:30h.

**Contextos en una relación parte-todo multiplicativa expresados por maestros en formación inicial**  
*E. Castro-Rodríguez, L. Rico y P. Gómez. Universidades de Granada y de Los Andes*

16:30-16:50h.

**Manifestación de pensamiento funcional en estudiantes de 5º de educación primaria**  
*J. C. Yáñez, M. C. Cañadas y E. Castro. Universidad de Granada*

16:50- 17:00h.

**Cierre del seminario**

---

## RESÚMENES

---

Jueves 3, 15:10- 15:30h.

**Análisis de los conocimientos implicados en un problema de Matemáticas desde un punto de vista competencial. El sistema de numeración decimal**  
*J. Hernández, M. M. Socas y M.ª M. Palarea. Universidad de La Laguna*

Se presenta en esta comunicación una manera práctica de analizar los conocimientos implicados en un problema de Matemáticas desde el punto de vista competencial, es decir, tomando en consideración a los objetos matemáticos desde las dimensiones: epistemológica, semiótica y fenomenológica. La resolución de problemas, como parte esencial de las Matemáticas, sigue teniendo dificultades, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma.

El análisis competencial se hará desde las perspectivas que ofrece el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), y toma como punto de partida el Modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), que permite describir el campo conceptual de los objetos matemáticos implicados en el problema, en relación a sus funciones y a su fenomenología, en términos operacionales, estructurales y procesuales, así como establecer sus diferentes conexiones.

El análisis del contenido matemático de cada situación problemática que se propone a los alumnos, facilitará la corrección y evaluación de las diferentes respuestas o ausencias de las mismas en cada problema, es decir, explicitar y relacionar los objetos del campo conceptual en términos de las operaciones, estructuras y procesos implicados, así como el contexto (situaciones, representaciones y razonamientos) en el que se desarrolla la tarea.

De manera concreta, se puede observar, por ejemplo, los conocimientos lingüísticos, es decir, si los alumnos tienen dificultades en la comprensión de las expresiones que forman el enunciado de la tarea; los conocimientos semánticos, que engloban el significado de las palabras que aparecen en el texto, tanto matemáticas como extra-matemáticas; los conocimientos anteriores facilitarán la comprensión global del problema, así como el tipo de problema que se quiere resolver; los tipos de razonamientos implicados, que el alumno puede utilizar, que van desde razonamientos asociados al esquema partes-todo, razonamientos inductivos y deductivos, heurísticos, razonamientos asociados a los diferentes campos numéricos, algebraicos, geométricos; las representaciones, que van desde el lenguaje habitual, a las representaciones digitales (numéricas, geométricas, algebraicas), analógicas (gráficas), virtuales (manipuladores virtuales...) y en ellas se podrá observar si las identifican, si realizan transformaciones, si realizan conversiones entre ellas, e incluso si elaboran una nueva representación; los conocimientos operacionales: operaciones, algoritmos y técnicas que ponen en juego; los conocimientos estructurales, es decir, conceptos (definiciones), propiedades y estructuras, y, finalmente, los conocimientos procesuales, es decir, los tres procesos matemáticos: sustitución formal, generalización y modelización.

Esta organización de los conocimientos implicados en un problema permite ver a los objetos matemáticos desde la triple dimensión: epistemológica, semiótica y fenomenológica. Se propone, a propósito del análisis anterior, un instrumento técnico para la práctica educativa del profesorado que le permite analizar los problemas en términos de la competencia matemática, organizada fenomenológicamente, y le facilita la organización de la enseñanza y el análisis de las dificultades y errores de sus alumnos en la identificación, planteamiento y resolución de los problemas. Se desarrolla la comunicación a partir de tres tareas concretas: “Números cuadrados”, “Perímetro de figuras”, y “El supermercado”, mostrando resultados de un grupo de alumnos del Grado de Maestro que las han realizado. Esta investigación está enmarcada en un Plan de formación de Maestros que llevamos varios años implementando.

Jueves 3, 15:30-15:50h.

### **Hacia la construcción de una teoría de instrucción local para los conceptos de Conjunto Generador y Espacio Generado**

*A. Cárcamo, J. Gómez y J. M<sup>a</sup> Fortuny. Universidad Autónoma de Barcelona*

Este estudio exploratorio se fundamenta en la necesidad de que la investigación en Educación Matemática a nivel universitario, de acuerdo con Selden y Selden (2001), posea un rol activo y contribuya al desarrollo del currículum. Aquí se presentan los resultados del primer ciclo de experimentación de una investigación de diseño más extensa cuyo objetivo es construir una teoría de instrucción local para los conceptos específicos de Álgebra Lineal: conjunto generador y espacio generado.

La teoría de instrucción local es el producto de la investigación de diseño e incluye tanto las teorías sobre el proceso de aprendizaje de los contenidos a enseñar como las teorías sobre los medios destinados a apoyar ese aprendizaje. Metodológicamente consiste en obtener un diseño instruccional “óptimo” a través de un proceso de experimentación con ciclos de revisión y rediseño (Gravemeijer, 2004).

En Álgebra lineal se han realizado recientes innovaciones para contribuir a superar las dificultades que los estudiantes tienen en este curso, entre ellas ha resultado ser eficaz, el uso de la modelización matemática como una herramienta para la enseñanza (Gómez y Fortuny, 2002). Por otra parte, la heurística de los modelos emergentes es un enfoque de uso reciente a nivel universitario que tiene como propósito que los estudiantes aprendan las matemáticas matematizando un cierto contenido a través de contextos que sean experienciales para ellos (Selden y Selden, 2001).

A partir de lo expuesto, el objetivo del primer ciclo de experimentación fue evaluar cómo un diseño instruccional, basado en la modelización matemática y en la heurística de los modelos emergentes, apoya la construcción de los conceptos conjunto generador y espacio generado. Para ello, se elaboró una trayectoria hipotética de aprendizaje y se aplicó en el aula con 30 estudiantes de primer año de ingeniería de la Universidad Politécnica de Catalunya en el periodo 2013-2014.

El análisis de los datos de la experimentación se inició con su organización y categorización. Luego, las tareas desarrolladas por los estudiantes y las grabaciones fueron analizadas desde la perspectiva de la pregunta de investigación: ¿Qué aporta un diseño instruccional basado en la modelización matemática y los modelos emergentes para la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado? Posteriormente, los datos se analizaron identificando ejemplos en que se manifestaran algún cambio del razonamiento informal a uno más formal con respecto a los conceptos estudiados y para ello, se utilizó como marco interpretativo los modelos emergentes de Gravemeijer. A partir de este análisis, se creó una historia que reconstruye el proceso de aprendizaje que siguieron los estudiantes.

Los resultados de este primer ciclo de experimentación sugieren que este diseño instruccional favorece la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado, ya que gran parte de los estudiantes logra hacer una transición desde su conocimiento matemático informal hacia una comprensión más formal de estos a través del desarrollo de las distintas actividades de aprendizaje propuestas en el diseño instruccional. Por otra parte, estos resultados servirán como insumo para refinar el diseño instruccional para aplicarlo en el segundo ciclo de experimentación.

Jueves 3, 15:50- 16:10h.

**Significados asociados a las variables por estudiantes de educación primaria**  
*M. Molina, A. del Río, M. C. Cañadas y A. Moreno. Universidad de Granada 3.*

En el marco de la propuesta de innovación curricular y línea de investigación conocida como Early Algebra (Molina, 2009), estamos desarrollando un proyecto de investigación que indaga en el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria de diferentes cursos. Entendemos el pensamiento funcional como un tipo de pensamiento algebraico que se centra en la relación entre dos o más cantidades que varían (Smith, 2008) e incluye el proceso de construir, describir y razonar con y sobre las funciones.

En esta comunicación atendemos a una de las dimensiones que abordamos en esta investigación: el significado que asignan estudiantes de educación primaria a letras que representan las variables dependiente e independiente de una relación funcional.

Como antecedente a destacar, que evidencia la capacidad de estudiantes de primero de educación primaria para trabajar con expresiones matemáticas que contengan letras, mencionamos un reciente trabajo de Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner (2015). En este estudio los autores describen los significados que un grupo de estudiantes de primero de primaria dan a las letras en situaciones relacionadas con relaciones funcionales del tipo  $y=x+b$ . Los estudiantes interpretan las letras como etiqueta u objeto, como representación de una cantidad indeterminada y como representantes de números concretos correspondientes a relaciones ordinales entre letras del alfabeto.

La investigación que presentamos consiste en un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011) en el cuál diseñamos e implementamos un diseño instruccional articulado en base a tareas de generalización que involucran relaciones funcionales lineales. Nuestros resultados completan los de estudios previos, los cuales refieren a escolares de otros países, y permiten contrastar las interpretaciones de estudiantes en diferentes cursos de primaria.

Jueves 3, 16:10- 16:30h.

**Construcción de la fracción impropia en alumnos de educación primaria de 9-12 años**  
*R. Campo y S. Llinares. Universidad de Alicante*

El objetivo de esta investigación es caracterizar el uso de las acciones de dividir e iterar en un contexto continuo en la construcción del concepto de fracción impropia en estudiantes de Educación Primaria de 9 a 12 años de edad (de 4º a 6º curso de educación primaria). Los participantes fueron 138 estudiantes de Educación Primaria, 41 de cuarto curso, 56 de quinto curso y 41 de sexto curso. Los resultados indican que las operaciones de dividir para hacer una cantidad en partes iguales, e iterar, repitiendo una parte fraccionaria para realizar un fracción más grande, que apoyan el significado de la relación entre la fracción unitaria y el todo necesaria para representar fracciones impropias no son suficiente para reconstruir la unidad a partir de una fracción dada.

Estos resultados pueden ser interpretados en el sentido de que existen dos momentos en la construcción del significado para las fracciones impropias: la representación de fracciones impropias a partir de una fracción unitaria y la reconstrucción y representación del todo. Los resultados obtenidos apoyan las conclusiones de la investigación de Hackenberg (2007) en las que se indica que un estudiante debe coordinar los tres niveles de unidades para representar fracciones impropias para superar la idea de las fracciones como partes dentro de un todo.

Viernes 4, 15:30- 15:50h.

**Ecuaciones mediante la igualación directa de cantidades distintas: una representación errónea de la relación entre cantidades decimal**

*J. A. González-Calero, D. Arnau, L. Puig, y M. B. Arevalillo-Herráez. Universidades de Castilla La Mancha y Valencia*

En esta comunicación se presentan algunos resultados de una investigación sobre la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente (STI) en cuarto curso de educación secundaria. La investigación contó con la participación de 53 alumnos de cuarto curso de Educación Secundaria y se estructuró en dos etapas: un estudio de grupo y un estudio de casos. El estudio de grupo pretendía analizar la competencia de estudiantes de secundaria en la resolución algebraica de problemas verbales tras ser instruidos mediante un STI. Por otro lado, el estudio cualitativo se orientaba tanto a documentar tendencias de los estudiantes al resolver problemas algebraicamente en un STI como dar sentido a algunos de los resultados obtenidos en el estudio de grupos.

Esta comunicación se centra en una línea de actuación predominante entre los estudiantes de nuestro estudio a la hora de afrontar problemas en donde se describen situaciones de proporcionalidad. En concreto, la comunicación ofrece evidencias de una tendencia a construir ecuaciones mediante la igualación directa de cantidades distintas. Las actuaciones de los estudiantes revelan que éstos podrían considerar estas ecuaciones erróneas como representaciones válidas de la relación (multiplicativa) que liga las cantidades igualadas.

La comunicación también muestra cómo las actuaciones de los estudiantes al resolver este tipo de problemas se vieron modificadas durante el estudio de casos al trabajar en el STI. Finalmente, la comunicación presenta una discusión sobre los diversos factores que podrían constituir el origen de esta dificultad en las resoluciones en lápiz y papel. Por un lado, los sistemas de ecuaciones podrían derivarse de una evolución incorrecta de una regla de tres, por la cual el resolutor transforma la representación clásica (con segmentos horizontales) para generar un sistema. Otra hipótesis, no incompatible con la anterior y consistente con las actuaciones documentadas en el estudio de casos, viene dada por el carácter de las cantidades involucradas en las relaciones multiplicativas. En particular, la cantidad no usada por los estudiantes es una cantidad no mencionada explícitamente en el enunciado, por lo que el estudiante podría tener dificultad para involucrarla en la resolución y evocar la estructura conceptual necesaria para construir la ecuación.

Vienes 4, 15:50- 16:10h.

**Estrategias de estudiantes de primero de educación primaria en una tarea que involucra la función  $y=x+5$**

*R. Morales, M. C. Cañadas, M. Molina, A. del Río y A. Moreno. Universidad de Granada*

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación cuyo foco de atención es el pensamiento funcional de los estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico. Consideramos el pensamiento funcional como parte del pensamiento algebraico, dentro de la propuesta curricular early algebra (Molina, 2009). El pensamiento funcional es una actividad cognitiva centrada en el proceso de construcción, descripción y razonamiento de y sobre las funciones (Cañadas, Brizuela y Blanton, en revisión; Smith, 2008); que incluye el proceso de generalización de las

relaciones funcionales entre cantidades, las estrategias empleadas para la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales y las formas de representación y razonamiento de esas relaciones mediante las cuales se puede entender el comportamiento de una función.

Existen escasos trabajos que aborden esta temática pero, en general, se destaca la capacidad de los estudiantes para abordar tareas contextualizadas que involucran relaciones funcionales desde las primeras edades (e.g., Blanton y Kaput, 2011).

En este trabajo nos centramos en describir las estrategias que emplean alumnos de primero de educación primaria en una tarea que involucra la función  $y=x+5$ . Analizamos los datos recogidos, en el contexto de un experimento de enseñanza, en una clase de 30 alumnos de primero de educación primaria a través de una tarea contextualizada. Como fuentes de información, contamos con la grabación en video de las sesiones en las que se implementó la tarea, las producciones individuales escritas de los estudiantes y entrevistas de algunos de ellos. En esta comunicación, mostramos un avance de los resultados obtenidos. Nos centraremos en presentar la diversidad de estrategias empleadas por los estudiantes (lleven a una solución errónea o adecuada), la utilización del conteo de objetos concretos, los tipos de relaciones identificadas (covariación o correlación), la identificación del patrón general y la forma de expresar la generalización o consideración del valor constante en la función. Compararemos estos resultados con nuestros principales antecedentes.

Viernes 4, 16:10-16:30h.

### **Contextos en una relación parte-todo multiplicativa expresados por maestros en formación inicial**

*E. Castro-Rodríguez, L. Rico y P. Gómez. Universidades de Granada y de Los Andes*

Las fracciones son un contenido de carácter problemático para los maestros en formación inicial. Unas de las principales razones es el significado parcial que los futuros maestros poseen acerca de algunos conceptos básicos, como la relación parte-todo. Este concepto es esencial en aritmética y fundamenta el concepto de fracción.

Se ha reflexionado frecuentemente sobre la relación parte-todo, junto con el papel que desempeña en la resolución de problemas aritméticos de estructura aditiva. No obstante, se ha profundizado menos en el caso de la relación multiplicativa parte todo, singularmente desde el punto de vista del conocimiento del profesor. Esta constatación nos llevó a ocuparnos en este tema. En particular, en este trabajo, nos centramos en los contextos o modos de uso que los maestros en formación inicial asocian con una relación parte-todo multiplicativa, como fundamento del concepto de fracción. Para ello, encuestamos, a 358 estudiantes universitarios del grado de Educación Primaria, a quienes presentamos cinco expresiones gráficas de una relación parte-todo multiplicativa y les solicitamos que redactasen enunciados de situaciones asociadas a esas representaciones.

Tras una revisión de las respuestas, identificación de variables según las componentes fundamentales de la relación multiplicativa parte-todo, codificación y organización de las respuestas, procedimos a clasificarlas mediante análisis inductivo de los datos recogidos, Obtuvimos así cinco categorías de contextos en los enunciados redactados por los maestros en formación inicial.

Un primer contexto, que identificamos como 'hallar la parte', se origina cuando la acción que da lugar a una parte proviene de dividir un todo en partes iguales. En todas las respuestas aquí incluidas se mencionan el todo, el número de partes, la igualdad de las partes y la cuestión se refiere a una de las partes. Para el segundo contexto, que denominamos 'hallar la parte complementaria', la acción se origina en una parte que se expresa como una fracción. La pregunta requiere identificar la parte complementaria. En el tercer contexto, 'reconstruir la unidad', se presenta un todo dividido y una de las partes, y la cuestión se refiere a las partes restantes. En cuarto lugar, en el contexto denominado 'reparto', se identifica un verbo sinónimo de repartir entre varias personas (distribuir, dar, entregar, etc.), un todo o conjunto que se reparte y un número de sujetos entre los que se les distribuyen las porciones. La cuestión es relativa a la porción que le corresponde a cada persona. Finalmente, un quinto contexto, denominado 'unidad de medida auxiliar', la parte y el todo se presentan como cantidades de la misma magnitud (peso, tiempo, volumen, superficie, etc.), y su relación se expresa como una relación entre cantidades de esta magnitud.

Viernes 4, 16:30-16:50h.

**Manifestación de pensamiento funcional en estudiantes de 5º de educación primaria**  
*J. C. Yáñez, M. C. Cañadas y E. Castro. Universidad de Granada*

Se presenta un análisis, discusión y conclusiones de los datos obtenidos de un grupo de 25 estudiantes sobre el pensamiento funcional que movilizan al trabajar un problema que permite tal pensamiento. Estos estudiantes, actualmente se encuentran escolarizados en 5º curso de educación primaria, en un colegio concertado de Granada capital. La resolución del problema tiene lugar en el contexto de un experimento de enseñanza en el que se persigue que los estudiantes descubran relaciones y patrones en tareas propias de 'Early-Algebra'. La metodología de trabajo en el aula, para dicho experimento, ha consistido en: trabajo individual, discusión en pequeños grupo y puesta en común de los resultados en gran grupo.