



Pensamiento Numérico y Algebraico
Educación Matemática



Historia de las Matemáticas y

INFORME DE LOS GRUPOS

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

XX Simposio de la SEIEM (MÁLAGA-2016)

Coordinadores de los grupos:

Antonio Codina Sánchez, Universidad de Almería (acodina@ual.es)

Luis Puig, Universitat de València Estudi General (luis.puig@uv.)

En este documento describimos la actividad realizada por los grupos PNA y HMEM en el contexto del XX Simposio de la SEIEM, celebrado en Málaga los días 8, 9 y 10 de septiembre de 2016. Como viene siendo habitual en los últimos años, estos dos grupos trabajan conjuntamente, y en esta ocasión dispusieron de dos sesiones de trabajo en las que se presentaron 11 comunicaciones sobre investigaciones realizadas por especialistas de diferentes universidades españolas. Cada ponente dispuso de 10 minutos para presentar su trabajo y, a continuación, los asistentes aportaron sugerencias y propuestas de mejora durante 5 minutos. En la parte final de la segunda sesión, se abrió un turno abierto de sugerencias a los asistentes con la finalidad de mejorar su funcionamiento. Desde aquí queremos agradecer el gran trabajo realizado por la organización de la SEIEM de Málaga que nos permitió desarrollar las sesiones sin incidencias.

A continuación detallamos los resúmenes de las comunicaciones presentadas.



Título	Autores
Significados escolares del concepto de porcentaje.	Mery Salinas Hernández Luis Rico Romero Elena Castro Rodríguez

El porcentaje es un concepto matemático con gran presencia en la cotidianidad. A menudo recibimos información mediante porcentajes en el comercio, las noticias y la televisión entre otros.

Aunque la noción de porcentaje es de conocimiento público y de cultura general, hay dificultades que subyacen de su significado, es decir, de su comprensión, interpretación y aplicación en situaciones cotidianas. Este hecho nos motivó a indagar y describir los significados del concepto porcentaje que manifiestan los estudiantes al finalizar sus estudios de Educación Primaria tras un primer acercamiento escolar a esta noción, ya que ellos constituyen la base de los aprendizajes en cursos posteriores.

Abordamos este estudio en términos de tres componentes del significado de un concepto matemático escolar: la estructura conceptual en que se sustenta, los sistemas de representación que lo expresan y los sentidos y modos de uso que emplea.

Para ello, encuestamos a 100 estudiantes chilenos de séptimo básico que, en el curso anterior, habían estudiado el concepto porcentaje por primera vez según las indicaciones de las Bases Curriculares y, que en el transcurso del presente año escolar (2016), no habían trabajado nuevamente este concepto.

A través de un cuestionario semántico de ocho enunciados, que busca recoger información sobre las componentes del significado mencionadas para la noción de porcentaje, se recogieron las expresiones escritas que proporcionó el alumnado.

Tras la codificación, organización y transcripción de datos, realizamos un análisis inductivo de las respuestas obtenidas a las preguntas 1, 2 y 7. De estos datos surgieron temas, identificamos subcategorías y categorías que permitieron clasificar las respuestas



para su interpretación en torno a las tres componentes del significado de un concepto matemático escolar: sistemas de representación, sentidos o modos de uso y estructura conceptual.

Respecto a los sistemas de representación que emplearon los estudiantes, identificamos representaciones gráficas (diagramas continuos de área y gráficas estadísticas), expresiones verbales, numérico-simbólicas junto con algunas relaciones parte-todo que se ajustan a una estructura aritmética aditiva o multiplicativa, o bien a una combinación de ambas. El sistema de representación más empleado fue la notación numérico-simbólica tradicional que consta de un numeral seguido del símbolo %.

Respecto a los sentidos o modos de uso, identificamos situaciones de descuento como predominantes en el ámbito comercial, siendo el descuento un término que los estudiantes vinculan directamente con la noción de porcentaje.

La estructura conceptual en que se enmarca el concepto sólo es puesta en evidencia por una minoría del alumnado. La relación parte-todo aflora de manera natural en las respuestas obtenidas. También identificamos respuestas que dan cuenta de la relación parte-parte, relaciones proporcionales, relaciones inversas y la consideración del porcentaje como un operador que se presentan con menor frecuencia.

Finalmente, consideramos que con este estudio contribuimos a identificar variables que pueden incidir en el tratamiento dado a la noción de porcentaje en las matemáticas escolares. Además, aportamos evidencia empírica de la pertinencia de las componentes de significado como sistema de clasificación, análisis e interpretación de las respuestas proporcionadas por los estudiantes mediante el cuestionario semántico.



Título	Autores
Vislumbrando la naturaleza afectiva de la comprensión en matemáticas.	Verónica A. Quintanilla Batallanos Jesús Gallardo Romero

En los últimos años venimos trabajando en un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas (*An Operative Model for Interpreting Understanding in Mathematics* [OMIUM]). Su configuración actual exhibe dos dimensiones, una fenómeno-epistemológica y otra hermenéutica. La dimensión fenómeno-epistemológica incorpora (a) un procedimiento operativo para la identificación y organización de situaciones matemáticas con las que registrar e interpretar la actividad matemática, basado en el análisis fenomenológico y epistemológico del propio conocimiento matemático (Gallardo y González, 2006; Gallardo, González y Quispe, 2008); y (b) una idea funcional de comprensión, caracterizada en términos de evidencias sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos que emergen de la actividad matemática (Gallardo, González y Quintanilla, 2014). En la dimensión hermenéutica estudiamos distintos problemas abiertos que afectan a la interpretación de la comprensión en matemáticas, como los relativos a la dualidad cognitivo-semiótica, el distanciamiento con el otro, la referencia al interpretar, el retorno inclusivo y la apropiación de la comprensión o la objetividad de la interpretación. En el recorrido por tales cuestiones fundamentamos un círculo interpretativo que proponemos para acceder de forma operativa a la comprensión matemática de los estudiantes (Gallardo y Quintanilla, 2016).

El OMIUM está en desarrollo y el círculo interpretativo propuesto por su dimensión hermenéutica está incompleto. Sobre todo a partir del trabajo de Quintanilla (2015), sentimos la necesidad de incorporar a su fundamentación teórico-metodológica una tercera dimensión centrada en la componente afectiva de la comprensión en matemáticas, que contribuya a dar respuestas a cuestiones como: ¿Cuál es la estrecha relación entre comprensión y afecto en matemáticas? ¿Cómo se puede vislumbrar lo



afectivo en la comprensión matemática? ¿Podemos mejorar el proceso de interpretación de la comprensión del conocimiento matemático incorporando un recorrido afectivo al círculo hermenéutico existente? Consideramos que la configuración de esta nueva dimensión podría establecer una vía operativa para estudiar desde un enfoque interpretativo los aspectos afectivos vinculados con la comprensión del conocimiento matemático. Por ello, hemos iniciado un proyecto de investigación que tiene como principal propósito *explorar la dimensión afectiva de la comprensión en matemáticas diseñando e incorporando al círculo hermenéutico del OMIUM un recorrido interpretativo complementario al ya existente que permita vislumbrar la naturaleza afectiva de la comprensión*. En este Simposio de la SEIEM pretendemos exponer, para su discusión y análisis crítico, los aspectos formales que delimitan este proyecto, el cual se desarrolla en el ámbito del pensamiento numérico y se enmarca en el Programa de Doctorado en Educación y Comunicación Social de la Universidad de Málaga (2015-2018).

Título	Autores
Didáctica de las funciones en bachillerato: simbiosis del aprendizaje cooperativo con las TIC.	Rafael Portero Luque Catalina Fernández Escalona Francisco José Ruiz Rey

Tras varios años impartiendo matemáticas en 1º de bachillerato, hemos llegado a la conclusión de que es necesaria una renovación en la forma de enseñar las funciones. Es evidente que el método expositivo tradicional está muy limitado y que no consigue que el alumnado comprenda el propio concepto de función, ni entienda las características y propiedades globales de las funciones elementales. En este trabajo, queremos plantear una estrategia didáctica alternativa que permita que el alumnado aprenda tal concepto.

La opción didáctica, que proponemos, aúna la aplicación de las funciones en la vida cotidiana, las tecnologías de la información y el aprendizaje cooperativo. De esta forma, queremos conseguir un aprendizaje significativo de las funciones elementales y de sus propiedades globales en el alumnado de 1º de bachillerato.



El concepto de función ha sido una de las ideas fundamentales de la matemática moderna, que ha penetrado en casi todos los campos del saber y puede ser aprovechado en una variedad de contextos. También se ha manifestado como uno de los conceptos más difíciles de enseñar, debido a su complejidad y a las numerosas subnociones asociadas al mismo.

Es por ello que, consideramos fundamental que el alumnado pueda interactuar con la funciones y entender de una forma real qué son, para qué sirven, y que le aporte un aprendizaje aplicable para la vida. Mediante este estudio los alumnos y alumnas deben inferir las características propias de cada una de estas funciones, además de las propiedades globales de las mismas, y siempre con referencias a situaciones reales.

Esta investigación es la primera parte de la tesis que estamos desarrollando y, mediante la cual, pretendemos conseguir una mayor implicación y motivación del alumnado. Para ello nos valemos del software matemático GeoGebra y de futuras aplicaciones implementadas para Android con el entorno App Inventor.

Mediante esta nueva opción didáctica, pretendemos conseguir una mayor implicación y motivación del alumnado y la asociación de las aplicaciones mencionadas con el aprendizaje cooperativo, lo que le permitirá entender las matemáticas de un modo completamente nuevo y visual.

Título	Autores
Los patrones geométricos como contexto para introducir a un estudiante de educación primaria con altas capacidades matemáticas en el álgebra.	Eva Arbona Picot María José Beltrán-Meneu Ángel Gutiérrez Rodríguez Adela Jaime Pastor

Esta investigación tiene como objetivo descubrir formas de trabajo pre-algebraicas que permitan llevar a cabo intervenciones extracurriculares con estudiantes de Educación Primaria de altas capacidades matemáticas. Siguiendo la metodología de investigación de diseño, elaboramos una secuencia de enseñanza para introducir el álgebra mediante problemas de patrones geométricos. Fue implementada con un



estudiante superdotado de 9 años que había finalizado 4º de Primaria. Siguiendo la metodología de estudio de casos, la experimentación tuvo lugar en formato de entrevista clínica a través de videoconferencia entre una investigadora y el estudiante.

La secuencia fue dividida en tres etapas, de modo que los contenidos y la consecución de los objetivos didácticos tuviesen una evolución gradual. La primera etapa estaba destinada al inicio del estudiante en la generalización mediante problemas de patrones geométricos. La segunda tenía por finalidad introducir conceptos algebraicos como el significado de las letras, la transformación de expresiones verbales en algebraicas y la resolución de ecuaciones lineales. En la tercera etapa buscábamos aplicar los conocimientos adquiridos y la dividimos en dos subetapas: una para resolver problemas de patrones geométricos en los que, previamente, el alumno había mostrado dificultades, y otra donde transferir esos conocimientos a otros contextos más dispares.

El análisis de las respuestas del estudiante muestra que, en la primera etapa, tenía preferencia por estrategias visuales y funcionales para la resolución de cuestiones de relación directa, y por estrategias de tanteo inteligente en cuestiones de relación inversa. Además, en las cuestiones de relación directa, empleó mayoritariamente generalizaciones algebraicas factuales y contextuales (Radford, 2006). En las cuestiones de relación inversa, el estudiante invertía las operaciones correctamente en generalizaciones de tipo $y=ax\pm b$, pero era incapaz de hacerlo en otras más complejas, resolviéndolas por tanteo inteligente.

De la segunda etapa destacó una comprensión dual del significado de las letras – como objeto y como número generalizado–, el uso correcto del paréntesis y la jerarquía de las operaciones al convertir sus generalizaciones verbales en expresiones algebraicas, y la resolución de ecuaciones lineales mediante el modelo de la balanza, que le permitió comprender el proceso de resolución mediante compensación y progresar en el uso de la sintaxis algebraica mediante diagramas representativos de la balanza.

La tercera etapa mostró un progreso en la adquisición de conocimientos y su asimilación significativa. El estudiante siguió haciendo uso de las estrategias visuales y



funcionales, pero realizando únicamente generalizaciones algebraicas simbólicas, pues los problemas pedían proporcionar expresiones algebraicas. Además, era capaz de resolver cualquier cuestión de relación inversa mediante ecuaciones, haciendo uso de las letras como variables y sin referencias aparentes a la balanza. También aplicaba correctamente y sin grandes dificultades los conocimientos adquiridos a distintos contextos del álgebra.

Finalmente, destacamos que el estudiante mostró características propias de alta capacidad matemática. Las más destacadas fueron identificación de patrones y relaciones, capacidad de generalizar, flexibilidad en el uso de estrategias, localización de la clave en los problemas y, principalmente, rapidez de aprendizaje.

Título	Autores
Sistemas de representación en fenómenos organizados por los límites finitos de sucesiones y funciones.	Isabel Duarte Tosso Antonio Jiménez Fernández Juan Antonio Macías García María Teresa Sánchez Compañía Francisco Javier Claros Mellado

El trabajo que se presenta a continuación está enmarcado en una investigación acerca de las definiciones de límite finito de sucesiones y límite finito de una función en un punto, que tiene dos objetivos principales: caracterizar fenómenos organizados por las definiciones anteriores y validar la presencia de dichos fenómenos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Comenzamos describiendo cuatro fenómenos, dos de ellos denominados “aproximación simple intuitiva (a.s.i)” y “retroalimentación o ida y vuelta en sucesiones (i.v.s)” organizados por una definición de límite finito de una sucesión. Y los otros dos denominados “aproximación doble intuitiva (ADI)” y “retroalimentación o ida y vuelta en funciones (IVF)” organizados por una definición de límite finito de una función en un punto.



Toda la investigación se sustenta en un marco teórico articulado en torno a tres pilares: pensamiento matemático avanzado (Tall y Vinner, 1981 y Tall, 1991), fenomenología (Freudenthal, 1983) y sistemas de representación (Janvier, 1987 y Blázquez y Ortega, 2001).

En este documento ponemos el foco de atención en la tercera componente de este marco teórico, los sistemas de representación. Varios autores han observado que se emplean representaciones diversas en la enseñanza del límite (véase Blázquez, 2000). No entraremos en las representaciones personales o internas y nos limitaremos a analizar las posibilidades que generan las representaciones, en lo relativo al límite finito de una sucesión y de una función en un punto, en el sentido dado por Janvier (1987).

A continuación, se procede a realizar un análisis relativo a cómo se expresan los fenómenos según los distintos sistemas de representación considerados. Para ello, nos basaremos en los resultados obtenidos en dos estudios de carácter experimental llevados a cabo en Claros (2010) y Sánchez (2012); el primero de ellos consistió en un análisis exhaustivo de libros de texto de secundaria y bachillerato, cuyos resultados pueden encontrarse en Claros, Sánchez y Coriat (2016); el segundo estudio experimental consistió en una serie de entrevistas a profesores de matemáticas de secundaria y bachillerato, cuyo principal resultado fue detectar diferentes tipos de perfiles fenomenológicos de profesores, en el sentido dado por Freudenthal (1983), a la hora de tratar en el aula la noción de límite finito de una función en un punto.

Tras exponer los datos obtenidos a partir de estos dos estudios, se procede a dar una conclusión de estos. Asimismo, se ha de destacar el contexto en el que tiene lugar este trabajo, que no es otro que el de un libro homenaje a Moisés Coriat, buscando así reconocer su gran trabajo realizado y la firme y destacable trayectoria que ha tenido.



Pensamiento Numérico y Algebraico
Educación Matemática



Historia de las Matemáticas y

El Tratado de Geometría Analítica de Juan
Cortázar a través de sus ediciones.

Carmen León-Mantero
Alexander Maz-Machado

En las últimas décadas, diversos investigadores en Historia de la Educación Matemática han centrado su interés en el estudio de los manuales escolares. A lo largo de la historia, han sido herramientas fundamentales en la escuela, proporcionando soporte a alumnos y profesores y estableciendo los escasos registros de información que han llegado hasta nuestros días. Su análisis manifiesta los conocimientos científicos de la época, los conocimientos que se impartían en los centros y cómo se enseñaban, así como el modelo organizativo del plan de estudios vigente, en definitiva la práctica real de la enseñanza dominante (Gómez, 2011).

El autor de manuales escolares que probablemente más contribuyó a la difusión y constitución de las matemáticas escolares en España y la formación matemática de varias generaciones de españoles durante la segunda mitad del siglo XIX y la primera parte del siglo XX fue el ingeniero bilbaíno Juan Cortázar. Sus obras fueron reeditadas en 150 ocasiones y llegaron al medio millón de ejemplares vendidos, incluso fueron publicadas sin la autorización de su autor en París y Nueva York (García, 1984). Por otro lado, fue uno de los dos primeros Catedráticos de matemáticas españoles de la Universidad Central de Madrid (Peset, Garma y Pérez Garzón, 1978).

El presente estudio analiza la más tardía de sus obras, el *Tratado de Geometría Analítica*, publicada por primera vez en 1855 y reeditada en cuatro ocasiones más. Se realizó un análisis de contenido que mostró la estructura conceptual y didáctica de la obra, así como los cambios sufridos a través de las tres ediciones a las que hemos tenido acceso caracterizadas por haber sido publicadas en el contexto de dos planes de estudio diferentes. Para ello se atendió a los contenidos que incluyen y los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos.



Título	Autores
Límite finito de una función en un punto: perfiles fenomenológicos en estudiantes del máster en profesorado para la validación de un instrumento de recogida de datos.	Antonio Jiménez Fernández Isabel Duarte Tosso Juan Antonio Macías García María Teresa Sánchez Compañía Francisco Javier Claros Mellado

El trabajo que se presenta a continuación es un estudio que continúa la línea de investigación iniciada por Sánchez (2012) acerca de los perfiles fenomenológicos del profesorado, en el sentido dado por Freudenthal (1983), acerca de la noción de límite finito de una función en un punto. En este caso, se ha diseñado un cuestionario online para la determinación de dichos perfiles en el alumnado del Máster en Profesorado de la Universidad de La Laguna. Los objetivos de esta investigación son: probar y validar el cuestionario y analizar los resultados que de él se extraigan.

Este cuestionario online busca medir la preferencia de los individuos de la muestra respecto a las definiciones y ejemplos que abordan la noción de límite finito de una función en un punto, en las cuales interviene el fenómeno ADI (Aproximación Doble Intuitiva) o el fenómeno IVF (Ida y Vuelta en Funciones), fenómenos descritos y caracterizados en Sánchez (2012). El diseño de este instrumento de recogida de información, y los pasos para llegar a él, fueron presentados en la anterior reunión de este grupo.

Para el análisis de los datos obtenidos, además de la componente visual descrita por Sánchez (2012), se ha empleado la “componente numérico-vectorial”, una componente que busca mejorar una dificultad encontrada a posteriori en la componente numérica que Sánchez definió, así como facilitar la interpretación y comparación de la información obtenida de un individuo.

La confirmación de la idoneidad de este formato de cuestionario como herramienta para clasificar diferentes tipos de perfiles fenomenológicos, permitirá usarlo tanto en profesores en activo como en formación. Pretendemos que el formato online de la



herramienta nos permita ampliar la muestra. Además, esperamos que el análisis de una mayor cantidad de respuestas nos permita obtener nuevas conclusiones que complementen las ya extraídas de los cuestionarios de los alumnos del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas tanto del curso 2014-2015 como del curso 2015-2016; tratados en la anterior reunión de este grupo.

Presentamos en este foro este trabajo con el fin de obtener sugerencias acerca de la forma de proceder y de la investigación en general.

Título	Autores
Fenómenos organizados por el límite infinito de sucesiones en libros de texto. Primeros avances.	Mónica Arnal Francisco Javier Claros Mellado María Teresa Sánchez Compañía

En este documento se presentan los primeros avances de un estudio sobre los fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión, en el sentido de Freudenthal, en libros de texto españoles de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. El estudio se abordará desde dos puntos de vista: el intuitivo, donde se realizará la búsqueda de los fenómenos "crecimiento intuitivo ilimitado" (c-i.i.) y "decrecimiento intuitivo ilimitado" (d-i.i.), y el formal, realizando la búsqueda del fenómeno "ida y vuelta de sucesiones con límite infinito" (i.v.s.i.). En cada uno de ellos se analizará la aparición del fenómeno, teniendo en cuenta los siguientes sistemas de representación: gráfico, verbal, simbólico y tabular (véase Janvier, 1987). Además se observará si dichos fenómenos se presentan a través de definiciones o de ejemplos, como ya se realizase en Claros (2010) y Sánchez (2012). La muestra está formada por libros de texto editados en las décadas de 1980, 1990, 2000 y 2010, quedando excluidos aquellos donde el límite infinito de sucesiones no aparece.

Para el estudio de los libros de texto, se ha creado un método sistemático con el que poder analizar posteriormente los resultados, dando lugar a la siguiente plantilla de



análisis de los mismos: ficha técnica, secuenciación didáctica, análisis de los fenómenos, ficha fenomenológica, resumen estructural y conclusión final. En la ficha técnica se recoge el título, año, autor, editorial y ley en vigor. En la secuenciación se realiza un resumen simplificado de los conceptos, definiciones y/o ejemplos que aparecen en el capítulo en la que se encuentra el límite infinito de sucesiones. En el apartado análisis de los fenómenos, se clasifica de forma razonada el fenómeno presente en cada una de las definiciones y/o ejemplos encontrados en el libro de texto, tomando como referencia su adecuación o no a la definición de los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. La ficha fenomenológica recopila, en una tabla, todos los fenómenos encontrados en el libro de texto, clasificados según su sistema de representación. En el resumen estructural se tiene en cuenta el peso del límite infinito de una sucesión en el capítulo, si su aparición es anterior o posterior al límite finito de una sucesión, si cumple los objetivos de la ley en vigor, entre otros. En la conclusión final se observa si los fenómenos definidos con anterioridad están presentes en los libros de textos y por tanto van a poder ser aplicables en el aula con los materiales actuales.

Una vez establecida la plantilla, se ha comenzado el análisis, de algunos de los libros de la muestra, arrojando los primeros resultados e iniciado una vía de futura para nuestra investigación

Título	Autores
Límite finito de una función en un punto: la componente numérico-vectorial para la clasificación de distintos perfiles fenomenológicos de profesores de matemáticas.	Juan Antonio Macías García Isabel Duarte Tosso Antonio Jiménez Fernández María Teresa Sánchez Compañía Francisco Javier Claros Mellado

Sánchez (2012) realizó una investigación acerca de algunos fenómenos organizados por varias definiciones de la noción de límite finito de una función en un punto, que tuvo dos objetivos principales: caracterizar dichos fenómenos y validar la presencia de los mismos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.



Comenzamos describiendo estos fenómenos denominados “Aproximación Doble Intuitiva (ADI)” y “Retroalimentación o Ida y Vuelta en Funciones (IVF)”. Justamente para validar la presencia de estos fenómenos en el proceso de enseñanza-aprendizaje se realizaron dos estudios experimentales, el segundo de los cuales se llevó a cabo con profesores de matemáticas de secundaria y bachillerato, que consistió en una serie de entrevistas que ponían de manifiesto, a través de sus relatos, las diferentes formas de trabajar el aula de estos profesores la noción de límite finito de una función en un punto. Esto nos permitió establecer diferentes perfiles fenomenológicos de profesores, en el sentido dado por Freudenthal (1983). Los perfiles se describían mediante dos componentes, una numérica y otra visual.

La componente numérica se definía como una fracción, lo que en su momento no supuso un problema, pero que a posteriori al ampliar las muestras de profesores ha llevado a detectar la dificultad de que el denominador de esa fracción puede que sea nulo. Lo que nos ha llevado a definir una nueva componente numérica del perfil fenomenológico. La nueva componente que definimos, a la que denominamos componente numérico-vectorial, trata justamente de solventar esta dificultad.

Si bien esta situación no se presentó en la muestra de Sánchez, sí que apareció en una encuesta piloto llevada a cabo con alumnos del Máster en Profesorado de Secundaria de la Universidad de Málaga, en la construcción de un instrumento que fue que fue presentado en la anterior reunión de este grupo.

Nuestra componente numérico-vectorial no altera los perfiles fenomenológicos del profesorado establecidos por Sánchez en su estudio, sino que amplía, con información adicional sobre la inclinación del profesorado a usar en mayor o menor medida, el fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI) o el fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF). La información dada en forma vectorial aporta mucha más información, ya que permite completar la componente visual ya descrita en Sánchez (2012).



Presentamos en este foro esta nueva definición con el fin de obtener sugerencias y posibles mejoras para la validación de esta componente.

Título	Autores
Estudio del infinito actual siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano con la ayuda de una experiencia física de espejos paralelos.	Juan Antonio Prieto Sánchez Catalina Fernández Escalona

Entre Bolzano y Cantor, hay diferencias esenciales en tanto a las teorías de conjuntos que exponen para llegar a definir el concepto del infinito. Es esto último lo que fijamos la atención. Mientras que la comparación y correspondencia que hace Cantor (uno –a-uno) es de exclusión (compara el conjunto de números naturales que es infinito numerable con otros conjuntos), la relación en Bolzano es de inclusión enfatizando la relación parte-todo, estableciendo una comparación dentro del propio conjunto.

Para ello hemos realizado un modelo físico experimental como tarea para examinar el razonamiento en la cardinalidad de conjuntos infinitos. El fenómeno físico elegido es la reflexión de imágenes infinitas que producen un número finito de objetos situados en espejos paralelos dispuestos en una plataforma para poder indagar en ellos el cardinal infinito mediante la misma posición de Bolzano; donde el foco de estudio era la comparación dentro del mismo conjunto y mediante una relación de inclusión.

Se ha corroborado con esa experiencia física en un grupo de estudiantes de secundaria, lo que Waldegg (2005 citado en Fuenlabrada, 2008) argumentan sobre el criterio de Bolzano: que es más “intuitivo” porque es más cercano a experiencias concretas (finitas) y además “menos paradójico”.

El objeto de nuestro estudio, es introducir el método de comparación con la relación de inclusión, con la ayuda de la experiencia física, como iniciación al aprendizaje del infinito.



Pensamiento Numérico y Algebraico
Educación Matemática



Historia de las Matemáticas y

Título	Autores
Aproximación aritmético-geométrica a los objetos del álgebra árabe medieval.	Abdelaziz Fadil Luis R. Puig Espinosa

Los manuales de texto para la enseñanza del álgebra árabe se caracterizan por una exposición temática detallada de contenidos centrada en las maneras de llevar a cabo cálculos aritméticos con objetos algebraicos mediante una colección extensa de ejemplos aclaratorios. En muchas ocasiones, ésta exposición viene acompañada de alguna argumentación que justifica el encadenamiento lógico de las operaciones algebraicas. Resulta que la justificación de procedimientos puramente algebraicos se traduce en representaciones con figuras geométricas y recíprocamente la argumentación de la resolución de problemas que son geométricos se reduce a la resolución algebraica de ecuaciones algebraicas. Para entender las razones de esta paradoja consideramos imprescindible volver al contexto histórico para analizar cómo se han definido originalmente los cuatro objetos básicos del álgebra: el número simple (*ʿadad mufrad*, عَدَدٌ مُفْرَدٌ), la raíz (*jadr*, جَذْرٌ), el bien (*māl*, مَالٌ) y el cubo (*ka`b*, كَعْبٌ). Veremos que estas definiciones se derivan principalmente de dos aproximaciones conceptuales a los objetos del álgebra. La primera recurre al corpus de la Aritmética (*al-ḥisāb* الْحِسَابُ), después de estructurarla conceptualmente, para justificar el significado de los términos del álgebra y de allí el porqué de todo el entramado de las operaciones que se efectúan sobre ellos. Vamos a analizar esta transición de la Aritmética, donde los números son conocidos, al álgebra donde los números son desconocidos. Para ello nos limitamos a abordar este análisis desde los siguientes enfoques de enseñanza: la denominación, la ordenación, y la proporción. La segunda es geométrica que se caracteriza por hallar una representación con figuras a los objetos del álgebra y de allí todas las manipulaciones que se efectúan sobre las mismas. Esta doble



Pensamiento Numérico y Algebraico
Educación Matemática



Historia de las Matemáticas y

aproximación a la definición y las propiedades de los objetos del álgebra ha marcado el modo de razonar los postulados algebraicos.